Über die sekundäre Bjerkneskraft bei zeitverzögert wechselwirkenden Kavitationsblasen

Diplomarbeit

vorgelegt von

Stefan Kamphausen

aus

Göttingen

angefertigt im

Dritten Physikalischen Institut

der Georg-August-Universität zu Göttingen

1999

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Strukturbildung bei Kavitationsblasen **5**

2.1 Die sekundäre Bjerkneskraft 6

2.2 Keller-Miksis-Modell 9

3 Die linearisierte Keller-Miksis-Gleichung **13**

3.1 Die linearisierte Keller-Miksis-Gleichung ohne Kopplung 13

3.1.1 Theorie 13

3.1.2 Ergebnisse 17

3.2 Die linearisierte Keller-Miksis-Gleichung mit Kopplung 21

3.2.1 Theorie 22

3.2.2 Ergebnisse 27

4 Ergebnisse der numerischen Simulationen **33**

4.1 Sekundäre Bjerkneskraft bei geringen Drücken 33

4.2 Sekundäre Bjerkneskraft bei hohem Druck 44

4.3 Sekundäre Bjerkneskraft bei für die Strukturbildung relevanten Parametern . 49

5 Ausgewählte Trajektorien von Kavitationsblasen **59**

6 Zusammenfassung und Ausblick **67**

A Delaydifferentialgleichungen **71**

A.1 Numerische Lösung von Delaydifferentialgleichungen 71

A.2 Implementierung eines Delaydifferentialgleichungenlösers 73

B Beispiel für ein einfaches Delaysystem **75**

B.1 Delay in der logistischen Gleichung 75

B.2 Erweiterung des Poincaré-Schnitts auf Delaydifferentialgleichungen 81

Literaturverzeichnis **83**

C Danksagung **87**

I am chaos.
I am the substance from which your artists and scientists build rhythms.
I am the spirit with which your children and clowns laugh in happy anarchy.
I am chaos. I am alive, and I tell you that you are free.[1]
ERIS, GODDESS OF CHAOS, DISCORD & CONFUSION

Kapitel 1
Einleitung

Das Auge des Physikers beobachtet wunderschöne Strukturen.

In dem Gebiet, das in dieser Arbeit untersucht wird, sind das leuchtende, verästelte Strukturen von kleinen Gasblasen in einer ultraschall-durchströmten Flüssigkeit. Die Wechselwirkung zweier solcher Kavitationsblasen in einem Ultraschallfeld wird in dieser Arbeit sowohl analytisch als auch numerisch untersucht. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei auf den Einfluss einer zeitlichen Verzögerung, im Folgenden meist *Delay* genannt, im Kopplungsterm der Modellgleichungen gelegt. Die so für die Kavitationsblasendynamik gefundenen Ergebnisse können bei der Erklärung der Strukturbildung, die in akustischen Kavitationsblasenfeldern beobachtet wird, nützlich sein. In diesem Fall tragen die Kräfte zwischen den Einzelblasen wesentlich zur Dynamik des ganzen Systems bei.

Als akustische Kavitation bezeichnet man das Aufreißen einer Flüssigkeit, wenn man Schall hoher Intensität durch sie schickt, wie WERNER LAUTERBORN in [20] beschreibt. Die dabei entstehenden Hohlräume nennt man Kavitäten oder (Kavitations-)Blasen. Er zeigt weiter, dass ein solches System nichtlineare Eigenschaften hat.
Systeme, denen nichtlineare Bewegungsgleichungen zugrunde liegen, wurden bereits Ende des letzten Jahrhunderts von HENRI POINCARÉ untersucht, der sich für die Stabilität von Planetenbahnen interessierte. Für solche Systeme gilt das Superpositionsprinzip im Gegensatz zu linearen Systemen nicht mehr. Somit wird ihre analytische Behandlung erheblich erschwert. Er fand heraus, dass die Langzeitvorhersage deterministischer Systeme auch ohne einen stochastischen Einfluss unmöglich sein kann.
Es dauerte schließlich bis in die 60er Jahre dieses Jahrhunderts bis sich wieder Forscher eingehender mit dieser Thematik beschäftigten. Da das Aufkommen digitaler Rechenmaschinen ermöglichte, komplexe Systeme numerisch zu untersuchen, weckten diese das Interesse der

[1] Eris, griech. Göttin des Chaos und der Verwirrung in *Principia Discordia* von Robert. A. Wilson

Forscher in bedeutendem Maße. Die so entstandene „Chaosforschung“ wurde bald zu einer beliebten Disziplin, nicht nur der Physiker.

EDWARD LORENZ stieß bei einer Simulation zur Wettervorhersage zufällig auf ein wesentliches Charakteristikum nichtlinearer Systeme: die sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Kleine Abweichungen der Systemparameter ließen seine Simulationsrechnungen in eine völlig andere Richtung laufen.
Dieses manchmal auch *Schmetterlingseffekt* genannte Phänomen lässt also ein System unter Umständen bei sehr ähnlichen Anfangsbedingungen zwei völlig verschiedene Entwicklungen nehmen. Wie LAUTERBORN zeigt (s. z. B. [19]), folgen auch die Schwingungen der Kavitationsblasen einer nichtlinearen Bewegungsgleichung. Sie können die typischen Verhaltensweisen chaotischer Systeme zeigen, unter anderem eben auch die sensitive Abhängigkeit von ihren Anfangsbedingungen.

An dieser Stelle setzt die Einführung eines Delays in das Kavitationsblasenmodell an. Die Blasendynamik wird durch nichtlineare Gleichungen beschrieben. Es ist also durchaus denkbar, dass der Einfluss einer zeitverzögerten Wechselwirkung zwischen den Blasen eine merkliche Änderung der Dynamik und damit der der Kräfte zwischen oszillierenden Blasen bewirken kann.

Zunächst wird in Kapitel 2 die Motivation dieser Arbeit aus dem Gebiet der Strukturbildung hergeleitet, und die wesentlichen Modellierungen werden vorgestellt. In Kapitel 3 wird eine linearisierte Form des verwendeten Blasenmodells betrachtet und auf den Einfluss des Delays hin untersucht, indem zwischen ungekoppelt und delay-gekoppelt schwingenden Blasen unterschieden wird. Kapitel 4 stellt die Ergebnisse der numerischen Simulationsrechnungen vor, denen das volle nichtlineare Blasenmodell zugrunde liegt. Das letzte Kapitel 5 zeigt anhand einiger ausgewählter Trajektorien der Blasenschwingungen Einzelheiten der Kavitationsblasendynamik, z. B. die Grenzen der Gültigkeit der Linearisierung. Im Anhang werden schließlich die Theorie der Delaydifferentialgleichungen sowie ihre numerische Behandlung vorgestellt. Dazu wird ein kleines Beispiel gegeben.

In dieser Arbeit wurde versucht, die neue deutsche Rechtschreibung umzusetzen. Wenn dieses nicht überall konsistent durchgehalten wurde, möge mir der Leser dieses verzeihen. Insbesondere die durch LaTeXvorgenommene Worttrennung mag von der aktuellen Rechtschreibung abweichen.

Kapitel 2
Strukturbildung bei Kavitationsblasen

Diese Arbeit befasst sich in wesentlichen Teilen mit der Berechnung der sekundären Bjerkneskraft, die zwischen zwei Kavitationsblasen wirkt. Die Motivation hierzu stammt aus den beobachteten Strukturen, die Kavitationsblasen in einem Ultraschallfeld bei geeigneten Parametern bilden können. Diese wegen ihrer Ähnlichkeit zu den elektrischen Lichtenbergfiguren ([23]) auch *akustische Lichtenbergfiguren* oder *Streamer* genannten Strukturen bestehen aus vielen stark inhomogen verteilten Einzelblasen, die sich auf kurzzeitig stabilen Pfaden mit Geschwindigkeiten bis zu einigen m/s durch die Küvette bewegen.

Diese verästelten Strukturen lassen sich in einem Experiment mit einer als Resonator dienenden rechteckigen Küvette, die mit Wasser gefüllt ist und in die intensiver Ultraschall eingestrahlt wird, dessen Frequenz gerade die (1,1,1)-Mode der Küvette anregt, beobachten (s. Abbildung 2.1). An verschiedenen auf die Küvette verteilten Quellpunkten enstehen

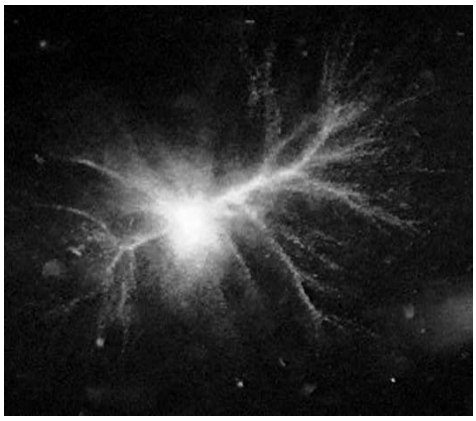

Abbildung 2.1: Zentrumsbereich der starken Streamer im Experiment

Kavitationsblasen, auf die verschiedene Kräfte wirken, so dass sie sich in Bewegung setzen. Diese Kräfte werden durch die primäre und sekundäre Bjerkneskraft gebildet. Zudem wirken noch Trägheits- und Reibungskräfte. Die *primäre Bjerkneskraft* rührt vom äußeren, stehenden Schallwellenfeld. In einem solchen Schallfeld erfährt eine räumlich ausgedehnte Blase mit

Volumen V einen Druckgradienten und somit eine Kraft in dessen negative Richtung. Durch zeitliche Mittelung dieser Kraft über eine Periode der Ultraschallanregung erhält man die primäre Bjerkneskraft (s. [22] oder auch [2]):

$$\vec{F}_{B1} = -\langle V(t)\nabla p_a(t)\rangle_t. \tag{2.1}$$

Die Kraft, die durch das abgestrahlte Schallfeld einer Blase auf eine andere wirkt, nennt man die *sekundäre Bjerkneskraft*. Dabei treten ganz erhebliche Unterschiede zwischen der linearen Theorie, die für kleine Anregungsdrücke und entsprechend kleine Schwingungen um die Ruheradien der Blasen gilt (s. Kapitel 3), und den numerischen Simulationen, die die Nichtlinearität der Blasen einbeziehen (Kapitel 4), auf.

Die primäre und sekundäre Bjerkneskraft wirken gegen die Trägheit der Blase und die viskose Reibung in der Flüssigkeit. Dabei wird bei der Trägheit die Masse des Blaseninhalts (Gas, Dampf) zumeist vernachlässigt, da der größte Teil von der verdrängten Flüssigkeit herrührt („virtuelle Masse“; s. [22]). Diese Größen sind allerdings für realistisch schwingende Blasen schwierig analytisch zu fassen. Daher entnimmt man sie zumeist den experimentellen Daten oder benutzt recht grobe Näherungen.
Die Kräftebilanz auf einzelne Blasen spielt eine Rolle im sog. *Partikel-* oder *Vielteilchenansatz*. Man versucht für mehrere hundert Blasen mit einem Ruheradius der Größenordnung einiger Mikrometer, deren Bewegung im Schallfeld zu modellieren, indem in zeitdiskreten Teilschritten jeder Blase ein Ort zugewiesen wird. Um das Problem zu vereinfachen nimmt man an, dass alle Blasen den gleichen Ruheradius haben und ihre Verteilung keinen Einfluss auf die Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit hat. Ferner berechnet man nur kurze Sequenzen unter einer Sekunde, um die Quellen der Blasen als ortsfest annehmen zu können. In [30] wird ein ausführlicher Überblick über die bisherigen Ergebnisse mit diesem Modell gegeben. Dort wird auch ein weiterer Ansatz zur Modellierung der Strukturbildung, das *Kontinuumsmodell*, beschrieben, das jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit ist (s. auch [3]). In den Simulationen von PARLITZ et al. wurde auf den wichtigen Beitrag der sekundären Bjerkneskraft für die Strukturbildung hingewiesen. Bei starken Drücken nimmt sie die Größenordnung der primären Bjerkneskraft an und kann möglicherweise sogar zu einem bistabilen System führen, wenn der Druckbauch des Ultraschallfeldes über die primäre Bjerkneskraft abstoßend wirkt, die sekundären Bjerkneskräfte in diesem Bereich hingegen anziehend sind. Somit ist eine nährere Betrachtung von großem Interesse.

2.1 Die sekundäre Bjerkneskraft

Es soll nun die Formel für die Berechnung der sekundären Bjerkneskraft hergeleitet werden. Es werden zwei Kavitationsblasen in einem stationären Schallfeld betrachtet, dessen Wellenlänge groß ist gegen den Abstand der Blasenmittelpunkte und dieser wiederum groß gegen die Blasenradien. Somit wird also zunächst angenommen, dass Phase und Amplitude des Schall-

drucks für beide Blasen gleich sind. Es wird weiter angenommen, dass die Blasen eine sphärische Form behalten mit Radien $R_1(t)$ und $R_2(t)$, wobei unterstellt wird, dass die Blasen nicht zu dicht bei einer Grenzfläche oder beieinander liegen, und dass keine Oberflächenmoden angeregt werden. Das Koordinatensystem werde so gewählt, dass die erste Blase in seinem Ursprung sitzt (s. Abbildung 2.2). In [25] wurde die Flüssigkeit in der Nähe der Blasen als

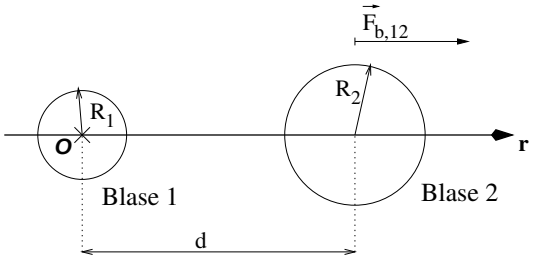

Abbildung 2.2: Koordinatensystem für das angenommene Modell. Die erste Blase sitzt im Ursprung, die zweite im Abstand d. r bezeichne die Radialkomponente und $\vec{F}_{b,12}$ die sekundäre Bjerkneskraft von der ersten auf die zweite Blase

inkompressibel angenommen. Dies gilt nun nicht mehr, da hier eine endliche Schallgeschwindigkeit angenommen wird. Da diese jedoch bis auf eine sehr kurze Phase beim Blasenkollaps groß gegen die Geschwindigkeit der Blasenwand ist ([5]), ist die Machzahl

$$M = \frac{\dot{R}(t)}{c}$$

klein, wobei $\dot{R}(t)$ Ableitung des Blasenradius nach der Zeit, und c die Schallgeschwindigkeit in Medium, also Wasser, bezeichne. Laut TRITTON gilt eine inkompressible Näherung ([36]):

$$\frac{\rho}{\Delta\rho} \ll 1 \tag{2.2}$$

(ρ bezeichne die Dichte und $\Delta\rho$ die Dichteänderung) für die Bewegungs- bzw. Navier-Stokes-Gleichung, wenn

$$M \ll 1. \tag{2.3}$$

Diese Bedingung ist bei den gegebenen Parametern erfüllt, solange für den Anregungsdruck p_a gilt:

$$p_a \ll 10^9\,\mathrm{Pa},$$

denn:

$$M^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{p_a}{\rho c^2}\right)^2 \approx \frac{p_a^2}{10^{18}}$$
$$\Rightarrow p_a \ll 10^9. \tag{2.4}$$

Dies ist für den Anregungsdruck und den gestreuten Druck erfüllt (außer eventuell kurz nach einem heftigen Blasenkollaps). Durch Wegfallen der Ableitungen nach den Winkeln (Radialsymmetrie wurde angenommen) erhält man dann aus der Kontinuitätsgleichung in Kugelkoordinaten für die Radialkomponente r des obigem Koordinatensystems das Geschwindigkeitsfeld w_1, das die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen am Ort der zweiten Blase, durch die Schwingung der ersten Blase erzeugt, bestimmt:

$$w_1 = \frac{R_1^2(t-\tau)\dot{R}_1(t-\tau)}{r^2}, \quad \tau = \frac{r}{c}\,. \tag{2.5}$$

Die Verzögerung um τ rührt von der Zeit, die der Druck für die Strecke zwischen den beiden Blasen benötigt.

$$\tau = \frac{d}{c}, \tag{2.6}$$

wenn d der Abstand der Blasen ist. Im Folgenden wird für $R_j(t-\tau)$ häufig auch $R_{j\tau}$ als synonyme Bezeichnung verwendet. Aus der Navier-Stokes-Gleichung erhält man entsprechend das Druckfeld, das von der ersten Blase in die Flüssigkeit abgegeben wird, bis auf Terme der Ordnung r^{-5}. Es gilt:

$$\rho\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial r} = 0, \tag{2.7}$$

und mit Gleichung (2.5) folgt nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial r} &= -\frac{\rho}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_{1\tau}^2\dot{R}_{1\tau}) \\ \Rightarrow p_1 &= \frac{\rho}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_{1\tau}^2\dot{R}_{1\tau}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Das Druckfeld der ersten Blase wirkt zusätzlich zum Anregungsdruck auf die zweite Blase (natürlich auch das der zweiten auf die erste). Sei $V_2(t) = \frac{4}{3}\pi R_2^3(t)$ das Volumen der zweiten Blase und $\vec{\nabla}p_1$ der Druckgradient, der an ihrer Position durch die erste Blase erzeugt wird; dann ist

$$\vec{F}_{12} = -V_2(t)\cdot\vec{\nabla}p_1 \tag{2.9}$$

die Kraft, die auf die zweite Blase wirkt. Somit erhält man für die auf die zweite Blase in der Entfernung d von der ersten wirkende Kraft:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -V_2(t)\left.\frac{\partial p_1}{\partial r}\right|_{r=d}\vec{e}_r \\ &= V_2(t)\frac{\rho}{d^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R_{1\tau}^2\dot{R}_{1\tau}\right)\vec{e}_r \\ &= \frac{\rho}{4\pi d^2}V_2(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}V_1(t-\tau)\,\vec{e}_r. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Dabei sind $V_1(t) = \frac{4}{3}\pi R_1^3(t)$ das Volumen der ersten Blase und $\vec{e}_r$ der radiale Einheitsvektor. Mittelt man nun diese Kraft über eine Anregungsperiode durch partielle Integration, erhält

man die effektive Kraft auf die zweite Blase: die *sekundäre Bjerkneskraft*:

$$\vec{F}_{b12} = \langle \vec{F}_{12} \rangle = -\frac{\rho}{4\pi d^2} \langle \dot{V}_1(t-\tau)\dot{V}_2(t) \rangle_t \vec{e}_r. \tag{2.11}$$

Im Fall kleiner, linearer Schwingungen beider Blasen mit Amplituden V_{ja} um das Volumen der ruhenden Blase $V_j(t) = V_{j0} + V_{ja}\cos(\omega t + \varphi_j),\ (j = 1,2)$ erhält man für ein inkompressibles Fluid (also ohne Delay; s. [30]):

$$\vec{F}_{b12,lin} = -\frac{\rho\omega^2}{8\pi d^2} V_{1a} V_{2a} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\vec{e}_r. \tag{2.12}$$

Somit ist die Aussage der linearen Näherung ohne Delay, dass sich Blasenpaare anziehen, die beide größer oder aber beide kleiner als der *lineare Resonanzradius* sind, während sich gemischte Blasenpaare abstoßen (hierzu später mehr). Es ist ersichtlich, dass die sekundäre Bjerkneskraft für den Fall nicht delay-gekoppelter Blasen invariant gegen Indexvertauschung $1 \leftrightarrow 2$ in Gleichung (2.11) ist, da dann $\dot{V}_1(t)$ und $\dot{V}_2(t)$ zum gleichen Zeitpunkt eingehen. Es ist zu beachten, dass bei einem Wechsel der Indizes auch das Koordinatensystem wechselt, so dass folgt: Bei instantan wechselwirkenden Blasen sind die sekundären Bjerkneskräfte gleich groß und entgegengesetzt:

$$\vec{F}_{b12} = -\vec{F}_{b21}. \tag{2.13}$$

Die Einführung des Delays wird diese Symmetrie auflösen, wie in Kapitel 3 gezeigt wird.

Genaugenommen hängt die Delayzeit τ auch von den momentanen Blasenradien $R_1(t)$ und $R_2(t)$ ([11]) ab. Außerdem verändert sich $d = d(t)$, falls die Blasen sich relativ zueinander bewegen. Falls sich die Blasen relativ zur Flüssigkeit bewegen, müssen evtl. verschiedene Delayzeiten wegen des Dopplereffekts berücksichtigt werden. Alle genannten Effekte werden jedoch vernachlässigt, so dass $\tau = \text{const}$ angenommen wird.

2.2 Keller-Miksis-Modell

Ausgehend von der in [29] verwendeten Gleichung für die Dynamik der zweiten von zwei gekoppelten Kavitationsblasen,

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{\dot{R}_2}{c}\right) R_2\ddot{R}_2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{\dot{R}_2}{2c}\right)\dot{R}_2^2 &= \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{\dot{R}_2}{c}\right)[p_{2w} - p_{st} - p_{ex}] \\ &+ \frac{R_2}{\rho c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_{2w} - p_{ex}] \\ &- \frac{1}{d}\left(2\dot{R}_1^2 R_1 + R_1^2\ddot{R}_1\right)\end{aligned} \tag{2.14}$$

mit

$$p_{2w} = \left(p_{st} + \frac{2\sigma}{R_{20}}\right)\left(\frac{R_{20}}{R_2}\right)^{3\kappa} - \frac{2\sigma}{R_2} - \frac{4\mu}{R_2}\dot{R}_2,$$

die ihrerseits vom Keller-Miksis-Modell stammt ([18], [29]), erhält man die Gleichung für diese Blase im delay-gekoppelten Fall zu

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{\dot{R}_2}{c}\right)R_2\ddot{R}_2+\left(\frac{3}{2}-\frac{\dot{R}_2}{2c}\right)\dot{R}_2^2 &= \frac{1}{\rho}\left(1+\frac{\dot{R}_2}{c}\right)\left[p_{2w}-p_{st}-p_{ex}\right]\\ &+ \frac{R_2}{\rho c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p_{2w}-p_{ex}\right]\\ &- \frac{1}{d}\left(2\dot{R}_{1\tau}^2R_{1\tau}+R_{1\tau}^2\ddot{R}_{1\tau}\right). \qquad (2.15)\end{aligned}$$

Die Größen in der Reihenfolge ihres Auftretens sind in Tabelle 2.1 aufgelistet. Die dort angegebenen Parameter orientieren sich am zitierten Kavitationsexperiment in Wasser bei einer 20 kHz Schallanregung. Durch Einsetzen von p_{2w} und Durchführen der Ableitung erhält man

Symbol	physikalische Größe	Wert (falls konstant)
c	Schallgeschwindigkeit in Wasser	$1500\,\mathrm{m/s}$
ρ	Dichte von Wasser	$998\,\mathrm{kg/m^3}$
p_{st}	Umgebungsdruck	100 kPa
p_{ex}	anregender Druck	variabel
p_a	Amplitude der Anregung, falls kosinusförmig	variabel
σ	Oberflächenspannung	$0.0725\,\mathrm{N/m}$
κ	Adiabatenexponent	1.4
μ	Viskosität von Wasser	$0.001\,\mathrm{kg/(ms)}$
ν	Frequenz der Anregung	20 kHz
ω	Kreisfrequenz der Anregung	$2\pi\cdot\nu$

Tabelle 2.1: Verwendete Symbole, ihre Bedeutung und soweit konstant ihre Werte in dieser Arbeit. Es wurden Normalbedingungen für Wasser und Luftdruck angenommen (die Schallgeschwindigkeit wurde dabei etwas aufgerundet).

dann für die kosinusförmige Anregung $p_{ex}=p_a\cos(\omega t)$

$$\begin{aligned}\ddot{R}_1\left(\left(1-\frac{\dot{R}_1}{c}\right)R_1+\frac{4\mu}{\rho c}\right) &= \left(\frac{1}{\rho}+\frac{\dot{R}_1}{c\rho}\right)\\ &\quad\left[\left(p_{st}+\frac{2\sigma}{R_{10}}\right)\left(\frac{R_{10}}{R_1}\right)^{3\kappa}-\frac{2\sigma}{R_1}-\frac{4\mu\dot{R}_1}{R_1}-p_{st}-p_a\cos(\omega t)\right]\\ &+ \frac{R_2}{\rho c}\left[\frac{2\sigma\dot{R}_1}{R_1^2}+\frac{4\mu\dot{R}_1^2}{R_1^2}-\frac{3\kappa\dot{R}_1}{R_1}\left(p_{st}+\frac{2\sigma}{R_{10}}\right)\left(\frac{R_{10}}{R_1}\right)^{3\kappa}+p_a\omega\sin(\omega t)\right]\\ &- \left(\frac{3}{2}-\frac{\dot{R}_1}{2c}\right)\dot{R}_1^2\\ &- \frac{1}{d}\left[2\dot{R}_2^2(t-\tau)R_2(t-\tau)+R_2^2(t-\tau)\ddot{R}_2(t-\tau)\right] \qquad (2.16)\end{aligned}$$

für die erste Blase bzw. für die zweite:

$$\begin{aligned}
\ddot{R}_2\left(\left(1-\frac{\dot{R}_2}{c}\right)R_2+\frac{4\mu}{\rho c}\right) &= \left(\frac{1}{\rho}+\frac{\dot{R}_2}{c\rho}\right) \\
&\quad \left[\left(p_{st}+\frac{2\sigma}{R_{20}}\right)\left(\frac{R_{20}}{R_2}\right)^{3\kappa}-\frac{2\sigma}{R_2}-\frac{4\mu\dot{R}_2}{R_2}-p_{st}-p_a\cos(\omega t)\right] \\
&+ \frac{R_2}{\rho c}\left[\frac{2\sigma\dot{R}_2}{R_2^2}+\frac{4\mu\dot{R}_2^2}{R_2^2}-\frac{3\kappa\dot{R}_2}{R_2}\left(p_{st}+\frac{2\sigma}{R_{20}}\right)\left(\frac{R_{20}}{R_2}\right)^{3\kappa}+p_a\omega\sin(\omega t)\right] \\
&- \left(\frac{3}{2}-\frac{\dot{R}_2}{2c}\right)\dot{R}_2^2 \\
&- \frac{1}{d}\left[2\dot{R}_1^2(t-\tau)R_1(t-\tau)+R_1^2(t-\tau)\ddot{R}_1(t-\tau)\right]. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Durch Umstellen und Zusammenfassen erhält man eine weniger aufwendige Form (speziell in Hinsicht auf die Numerik [29]):

$$\begin{aligned}
\ddot{R}_1 &= \left[\left(1+(1-3\kappa)\frac{\dot{R}_1}{c}\right)\left(\frac{p_{st}}{\rho}+\frac{2\sigma}{\rho R_{10}}\right)\left(\frac{R_{10}}{R_1}\right)^{3\kappa}\right. \\
&- \frac{2\sigma}{\rho R_1}-\frac{4\mu}{\rho}\frac{\dot{R}_1}{R_1}-\left(\frac{3}{2}-\frac{\dot{R}_1}{2c}\right)\dot{R}_1 \\
&- \left(1+\frac{\dot{R}_1}{c}\right)\frac{p_{st}+p_a\cos(\omega t)}{\rho}+R_1\frac{p_a\omega}{\rho c}\sin(\omega t) \\
&- \left.\frac{1}{d}\left(2\dot{R}_2^2(t-\tau)R_2(t-\tau)+R_2^2(t-\tau)\ddot{R}_2(t-\tau)\right)\right]\times \\
&\left[\left(1-\frac{\dot{R}_1}{c}\right)+\frac{4\mu}{\rho c}\right]^{-1}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

für die erste Blase und entsprechend für die zweite:

$$\begin{aligned}
\ddot{R}_2 &= \left[\left(1+(1-3\kappa)\frac{\dot{R}_2}{c}\right)\left(\frac{p_{st}}{\rho}+\frac{2\sigma}{\rho R_{20}}\right)\left(\frac{R_{20}}{R_2}\right)^{3\kappa}\right. \\
&- \frac{2\sigma}{\rho R_2}-\frac{4\mu}{\rho}\frac{\dot{R}_2}{R_2}-\left(\frac{3}{2}-\frac{\dot{R}_2}{2c}\right)\dot{R}_2 \\
&- \left(1+\frac{\dot{R}_2}{c}\right)\frac{p_{st}+p_a\cos(\omega t)}{\rho}+R_2\frac{p_a\omega}{\rho c}\sin(\omega t) \\
&- \left.\frac{1}{d}\left(2\dot{R}_1^2(t-\tau)R_1(t-\tau)+R_1^2(t-\tau)\ddot{R}_1(t-\tau)\right)\right]\times \\
&\left[\left(1-\frac{\dot{R}_2}{c}\right)+\frac{4\mu}{\rho c}\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Dieses System zweier nichtlinearer, delay-gekoppelter Differentialgleichungen wird in Kapitel 4 untersucht werden, um aus der so gewonnenen Kavitationsblasendynamik die sekundäre Bjerkneskraft zu berechnen.

Kapitel 3
Die linearisierte Keller-Miksis-Gleichung

Thema dieses Abschnitts ist eine analytische Betrachtung der Keller-Miksis-Gleichung, die kleine Schwingungen der Blasen um ihren Ruheradius voraussetzt (R_j bezeichne dabei den Radius der j-ten Blase):

$$R_j(t) = R_{j0} + R'_j(t) \quad \text{mit} \quad \left|R'_j\right| \ll R_{j0},\ j = 1,2. \tag{3.1}$$

In diesem Fall lässt sich die Keller-Miksis-Gleichung linearisieren und analytisch lösen. Aus dieser Lösung wird die sekundäre Bjerkneskraft gemäß Formel (2.11) berechnet und das Ergebnis dargestellt. Im zweiten Teil dieses Abschnitts wird die Kopplung der Blasen mit Delay eingeführt, und daraus folgende Ergebnisse werden mit dem ungekoppelten Fall verglichen.

3.1 Die linearisierte Keller-Miksis-Gleichung ohne Kopplung

Zunächst wird der Fall ungekoppelt schwingender Blasen behandelt, bei denen das Strahlungsfeld der einen bei der anderen nicht in die Bewegungsgleichung mit eingeht.

3.1.1 Theorie

Für Blasen, für deren Ruheradius R_{j0} $4\mu/\rho c \ll R_{j0} \ll c/\omega = \lambda/2\pi$ gilt, und bei geringem Anregungsdruck $p_a \ll p_{st}$ gilt die linearisierte Form der Keller-Miksis-Gleichung (der Einfachheit halber in komplexer Schreibweise):

$$\ddot{R}'_j + \alpha_j \dot{R}'_j + \omega_{j0}^2 R'_j = -\frac{p_a}{\rho R_{j0}} e^{(i\omega t)} \tag{3.2}$$

$$\text{mit} \quad \alpha_j = \frac{4\mu}{\rho R_{j0}^2} + \frac{\omega_{j0}^2 R_{j0}}{c}$$

$$\text{und} \quad \omega_{j0}^2 = \frac{1}{\rho R_{j0}^2}\left[3\kappa p_{st} + \frac{2\sigma}{R_{j0}}(3\kappa - 1)\right]. \tag{3.3}$$

Man kann aus der Beziehung zwischen ω_0 und R_{j0} (3.3) entweder den *linearen Resonanzradius* $R^{res}_{j0,lin}$ (*Minneart'scher Radius* [26]) bei gegebenem ω_{j0} oder aber zu einem R_{j0} die

lineare Resonanzfrequenz $\nu_{j0}^{lin} = \frac{\omega_{j0}^{lin}}{2\pi}$ berechnen. Für diese beiden Größen gilt bei Vernachlässigung der Oberflächenspannung σ und bei Normalbedingungen in Wasser die Faustregel $\nu_{j0}^{lin} \cdot R_{j0}^{res} \approx 3\,\mathrm{m/s}$. Somit ergibt sich also für den linearen Resonanzradius bei der hier durchgehend verwendeten Anregungsfrequenz von $\nu = 20\,\mathrm{kHz}$:

$$R_{j0,lin}^{res} \approx 150\,\mu\mathrm{m}$$

bzw. durch explizites Auflösen von Gleichung (3.3) nach R_{j0}:

$$R_{j0,lin}^{res} = 163\,\mu\mathrm{m}.$$

Nun soll Gleichung (3.2), die einen getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillator beschreibt, gelöst werden.
Ansatz:

$$\begin{aligned} R_j'(t) &= \hat{R}_j e^{i\omega t} e^{i\varphi_j} \qquad (3.4)\\ \Rightarrow \quad \dot{R}_j'(t) &= i\omega \hat{R}_j e^{i\omega t} e^{i\varphi_j} \\ \Rightarrow \quad \ddot{R}_j'(t) &= -\omega^2 \hat{R}_j e^{i\omega t} e^{i\varphi_j}. \end{aligned}$$

Einsetzen in (3.2) und Teilen durch $e^{i\varphi_j} e^{i\omega t}$ ergibt:

$$\begin{aligned} \hat{R}_j \left(\omega_{j0}^2 - \omega^2 + i\alpha_j\omega\right) &= -\frac{p_a}{\rho R_{j0}} e^{-i\varphi_j} \qquad (3.5)\\ &= -\frac{p_a}{\rho R_{j0}} \left(\cos\varphi_j - i\sin\varphi_j\right) \qquad (3.6) \end{aligned}$$

Von dieser Gleichung der Realteil und der Imaginärteil betrachtet, ergibt ein Gleichungssystem:

Realteil:

$$\hat{R}_j \left(\omega_{j0}^2 - \omega^2\right) = -\frac{p_a}{\rho R_{j0}} \cos\varphi_j \qquad (3.7)$$

Imaginärteil:

$$\hat{R}_j \left(\alpha_j\omega\right) = \frac{p_a}{\rho R_{j0}} \sin\varphi_j. \qquad (3.8)$$

Quadrieren und Addieren der beiden Gleichungen (3.7) und (3.8) liefert nach Umstellen:

$$\hat{R}_j = \frac{p_a}{\rho R_{j0}} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_{j0}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\alpha_j\omega\right)^2}}. \qquad (3.9)$$

Teilt man hingegen die beiden Gleichungen durcheinander, erhält man:

$$\begin{aligned} \tan(\varphi_j) &= -\frac{\alpha_j\omega}{\left(\omega_{j0}^2 - \omega^2\right)} \\ \Rightarrow \quad \varphi_j &= \arg\left(\frac{\alpha_j\omega}{\left(\omega^2 - \omega_{j0}^2\right)}\right). \qquad (3.10) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Schwingung als Realteil des Ansatzes (3.4) zu:

$$\begin{aligned} R_j'(t) &= \hat{R}_j \cos(\omega t + \varphi_j) \\ \text{mit} \quad \hat{R}_j &= \frac{p_a}{\rho R_{j0}\sqrt{(\omega_{j0}^2-\omega^2)^2+(\alpha_j\omega)^2}} \\ \varphi_j &= \arg\left(\frac{\alpha_j\omega}{\left(\omega^2-\omega_{j0}^2\right)}\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Also schwingt die Blase gemäß

$$R_j(t) = R_{j0} + \hat{R}_j \cos(\omega t + \varphi_j) \tag{3.12}$$

mit einem $\hat{R}_j \ll R_{j0}$. Es ergibt sich dann für das Volumen der j-ten Blase:

$$V_j(t) = \frac{4}{3}\pi\left(R_{j0}^3 + 3R_{j0}^2\hat{R}_j\cos(\omega t+\varphi_j) + O(\hat{R}_j^2)\right) \tag{3.13}$$

$$\approx \frac{4}{3}\pi R_{j0}^2\left(R_{j0} + 3\hat{R}_j\cos(\omega t+\varphi_j)\right) \tag{3.14}$$

bzw. für die Ableitung:

$$\dot{V}_j(t) = -4\pi R_{j0}^2\hat{R}_j\omega\sin(\omega t+\varphi_j). \tag{3.15}$$

Eingesetzt in die Gleichung (2.11) erhält man dann für die sekundäre Bjerkneskraft:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{b12,lin}^{\,\tau} &= -\frac{\rho}{4\pi d^2}\langle\dot{V}_1(t-\tau)\dot{V}_2(t)\rangle_t\,\vec{e}_r \\ &= -\frac{\rho(4\pi\omega)^2}{4\pi d^2}R_{10}^2\hat{R}_1R_{20}^2\hat{R}_2\langle\sin[\omega(t-\tau)+\varphi_1]\sin[\omega t+\varphi_2]\rangle_t\,\vec{e}_r \\ &= -\frac{4\pi\rho\omega^2}{d^2}R_{10}^2\hat{R}_1R_{20}^2\hat{R}_2\frac{1}{T}\int_0^T\sin[\omega(t-\tau)+\varphi_1]\sin[\omega t+\varphi_2]\,\mathrm{d}t\,\vec{e}_r. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y)$$

(s. [8]; dieses Buch darf nicht unerwähnt bleiben) und aufgrund des verschwindenden Integrals

$$\int_0^T\cos(2\omega t+\varphi_1+\varphi_2-\omega\tau)\,\mathrm{d}t$$

erhält man die sekundäre Bjerkneskraft im linearen Fall zu:

$$\vec{F}_{b12,lin}^{\,\tau} = -\frac{2\pi\rho\omega^2}{d^2}R_{10}^2\hat{R}_1R_{20}^2\hat{R}_2\,\cos(\varphi_1-\varphi_2-\omega\tau)\,\vec{e}_r. \tag{3.17}$$

Dabei berechnen sich die $\hat{R}_j$ und φ_j nach Gl. (3.9) und Gl. (3.10). [Dies ist konsistent mit Gleichung (2.12), wobei hier eine Radiusschwingung betrachtet wird, in Gl. (2.12) dagegen eine Volumenschwingung.]

Da das Delay τ im Argument des Kosinus auftaucht, ist es sinnvoll, das Delay in Bruchteilen der Periodendauer $T = 50\,\mu$s zu messen. So wurden für verschiedene feste Anregungsdruckamplituden p_a, deren Größe die Nichtlinearität in der Keller-Miksis-Gleichung bestimmt, Serien verschiedener τ berechnet. Dabei wurde jedesmal $\tau = T/100$ für ein sehr kleines Delay gewählt und $\tau = T/50$, um die Dynamik von sehr kleinem Delay zu größerem aufzuzeigen, falls diese bemerkenswert erschien. Delaywerte von $\tau = T/5$, $\tau = T/4.1$, $\tau = T/4$ und $\tau = T/3$ zeigen die Entwicklung um den „unsymmetrischsten“ Punkt bei $\tau = T/4$, an dem die in [25] beobachtete Symmetrie bei Blasenvertauschung im nicht delay-gekoppelten Fall am wenigsten wiederzufinden ist. Als letzter Wert jeder Serie zeigt $\tau = T/2$ die Invertierung von $\tau = 0$ durch Verschiebung der Phase des abgestrahlten Schallfeldes um π. Dies ist der größte untersuchte Delaywert. Was ein „großes“ Delay ist, hängt allerdings stark von der Anregungsfrequenz ab, d. h. von der Periodenlänge der Blasenschwingung im Verhältnis zur Laufzeit des Schalls, bis er auf vernachlässigbare Größe abgeklungen ist. Bei höheren Frequenzen können durchaus τ-Werte interessant sein, die ein Vielfaches von T betragen.

Die sekundäre Bjerkneskraft der ersten auf die zweite Blase gemäß Gleichung (3.17) wird in den folgenden Abbildungen, die die R_{10}-R_{20}-Ebene zeigen, in z-Richtung aufgetragen und auf der linken Seite als Gebirgsplot mit der Projektion der Nulldurchgangslinie gezeigt. Der vektorielle Charakter der Kraft findet dabei keine Berücksichtigung; es ist immer die Kraft in positive $\vec{e}_r$-Richtung gemeint, d. h. es ist in den Abbildungen

$$F_{b12} = \vec{F}_{b12} \cdot \vec{e}_r$$

dargestellt. Der Ausschnitt aus der R_{10}-R_{20}-Ebene zwischen $100\,\mu\text{m} \leq R_{j0} \leq 250\,\mu\text{m}$ wurde gewählt, da sich der lineare Resonanzradius etwa in der Mitte dieses Ausschnitts befindet, und in dessen Nähe die bedeutenden Beobachtungen an der Dynamik zu erwarten sind. In allen wesentlichen Arbeiten zu diesem Thema wurde ebenfalls starkes Augenmerk auf das Vorzeichen der sekundären Bjerkneskraft gelegt, so dass es sinnvoll erscheint, dies auch hier zu tun, damit die Unterschiede zu bisherigen Theorien, die sich durch das Delay ergeben, deutlich gemacht werden. Daher ist rechts in der Abbildung das zur Bjerkneskraft gehörende Vorzeichen abgebildet. Dabei bedeutet schwarz eine negative Kraft, also Anziehung, und weiß eine positive, also Abstoßung. Für das Partikelmodell ist das Vorzeichen der sekundären Bjerkneskraft von besonderem Interesse. Wird beispielsweise die erste Blase von der zweiten angezogen, die zweite aber von der ersten abgestoßen, laufen sie zusammen in eine Richtung, und dieses Verhalten könnte für das Auftreten von Streamern mit verantwortlich sein.

3.1.2 Ergebnisse

Es wird ein Anregungsdruck von 10 kPa betrachtet, bei dem die lineare Näherung über weite Strecken noch gut gerechtfertigt sein sollte. Dieser Wert ist aber bereits ein Grenzfall, wie in Abschnitt 5 gezeigt wird. Bei sehr kleinem Delay (Abbildung 3.1) ist die Bjerkneskraft nach dem linearisierten, ungekoppelten Modell, $F_{bj,lin}$, für den Fall, dass beide Blasen entweder kleiner oder größer als ihr Resonanzradius sind, anziehend. Umgekehrt stoßen sie sich ab, wenn eine kleiner, die andere aber größer ist. Das ist das Verhalten, das man von ungekoppelten linear schwingenden Blasen erwartet. Das Delay hat hier also keinen nennenswerten Einfluss auf das Vorzeichen der sekundären Bjerkneskraft. Außer in direkter Nähe der linearen Resonanz lassen sich Die Indizes der Blasen austauschen, d. h. die Kraft der zweiten Blase auf die erste ist gerade entgegengesetzt gleich der ersten auf die zweite.

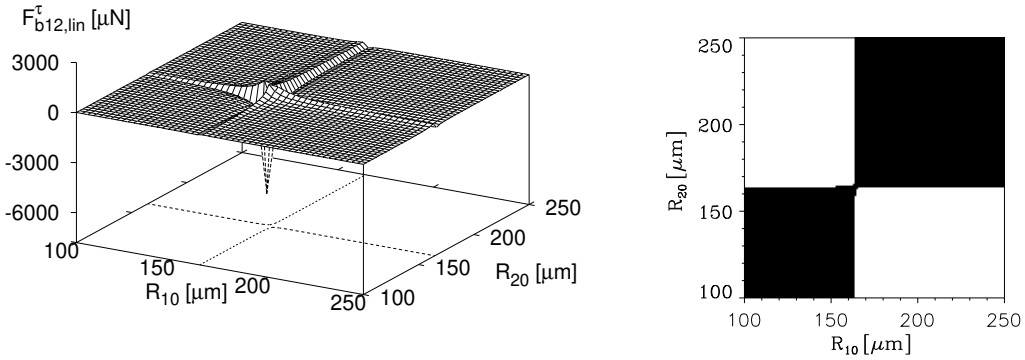

Abbildung 3.1: Links: sekundäre Bjerkneskräfte $\vec{F}^{\tau}_{b12,lin}$ in der R_{10}-R_{20}-Ebene für das linearisierte Modell ohne Kopplung bei $\tau = T/100$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 0.75\,\mathrm{mm}$. Anregung dabei: Druck $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$ und Frequenz $\nu = 20\,\mathrm{kHz}$. Rechts: Das Vorzeichen der Bjerkneskräfte. Schwarz bedeutet anziehende, weiß abstoßende Kräfte der ersten auf die zweite Blase. Das Ergebnis stimmt mit der bekannten linearen Theorie überein: sind beide Blasen kleiner oder größer als ihr linearer Resonanzradius, ziehen sie sich an, sonst stoßen sie sich ab.

In den folgenden Abbildungen 3.2 bis 3.8 wird das Delay bei einem weiterhin konstanten Anregungsdruck von $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$ von $\tau = T/10$ (noch klein) auf $\tau = T/2$ (Maximalwert) erhöht. Der Betrag der Bjerkneskraft nimmt mit zunehmendem Abstand immer weiter ab bis zu wenigen μN bei $\tau = T/2$. Das ist auch zu erwarten, da die Kraft ja in Gleichung (3.17) mit $1/d^2$ skaliert und $d = c \cdot \tau$ gilt.. Zu beachten ist bei all diesen Abbildungen, dass die Extrema in den Abbildungen nicht notwendig die absoluten Extremwerte der sekundären Bjerkneskraft sind, denn die Werte wurden auf einem festen Raster bestimmt, so dass es nicht gewährleistet ist, Minima oder Maxima exakt zu treffen, die sich aber auch nicht immens von den angezeigten

unterscheiden sollten

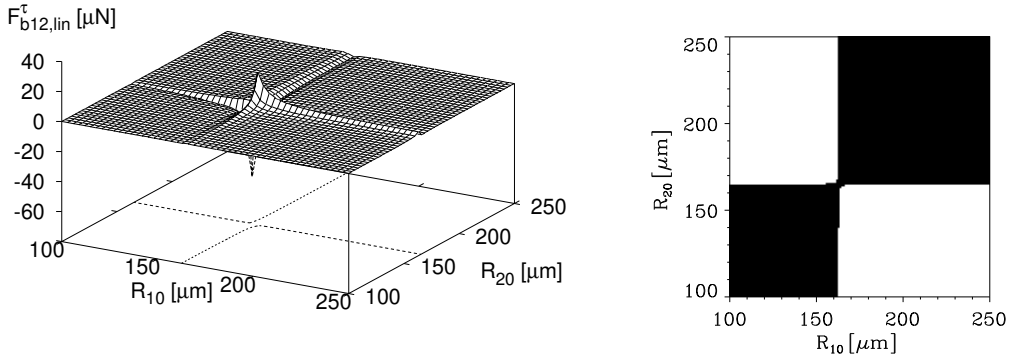

Abbildung 3.2: Sekundäre Bjerkneskraft und Vorzeichen wie in Abbildung 3.1 bei $\tau = T/10$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 7.5\,\mathrm{mm}$. In der Mitte wird der beginnende Symmetriebruch sichtbar.

In Abbildung 3.2 ist bei $\tau = T/10$ gegenüber Abbildung 3.1 noch kein großer Unterschied bezüglich der Vorzeichen zu erkennen. Der Betrag der Kräfte hat bedeutend abgenommen, das Schachbrettmuster der Vorzeichenverteilung hat sich kaum geändert. Lediglich am Berührungspunkt aller Felder in der Mitte kann man erkennen, dass sich die abstoßenden Bereiche etwas voneinander entfernt haben. Dieser erkennbare Symmetriebruch rührt vom größeren Delay. In Gleichung (3.17) stehen im Argument des Kosinus nicht mehr nur die Phasenwinkel der Blasenschwingungen zur Anregung, sondern zusätzlich noch eine weitere Phase durch das Delay. Somit lassen sich die Indizes in dieser Gleichung nicht mehr ohne weiteres vertauschen. Die Symmetrie wird sichtbar gebrochen, sobald τ groß genug ist, dass es im Argument eine Rolle spielt und nicht mehr gilt $\cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \omega\tau) \approx \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Dieser Trend setzt sich in Abbildung 3.3 weiter fort. Doch trotz der recht großen Änderung in τ von $T/10$ auf $T/5$, also einer Verdopplung des Blasenabstandes von $d = 7.5\,\mathrm{mm}$ auf $d = 15\,\mathrm{mm}$, ist die Änderung im Vorzeichenbild noch sehr gering. Im Bereich um $\tau = T/4$ ändert es sich hingegen sehr schnell. Abbildung 3.4 zeigt bei $\tau = T/4.1$ die Tendenz der Änderungen deutlich: der linke obere abstoßende Bereich, wenn die erste Blase kleiner als ihr Resonanzradius, die zweite hingegen größer ist, zieht sich immer weiter zurück, während sich der untere Bereich für die entsprechend umgedrehten Resonanzradiusverhältnisse aufweitet. Die ursprüngliche Symmetrie ist hier schon kaum noch zu erkennen.

In Abbildung 3.5 schließlich ist bei $\tau = T/4$ der linke, obere anziehende Bereich ganz aus dem dargestellten Ausschnitt der R_{10}-R_{20}-Ebene verschwunden und der rechte, untere abstoßende Bereich so gewachsen, dass die R_{10}-R_{20}-Ebene durch die Winkelhalbierende geteilt wird. Damit ist die sekundäre Bjerkneskraft anziehend, wenn die 2. Blase einen größeren

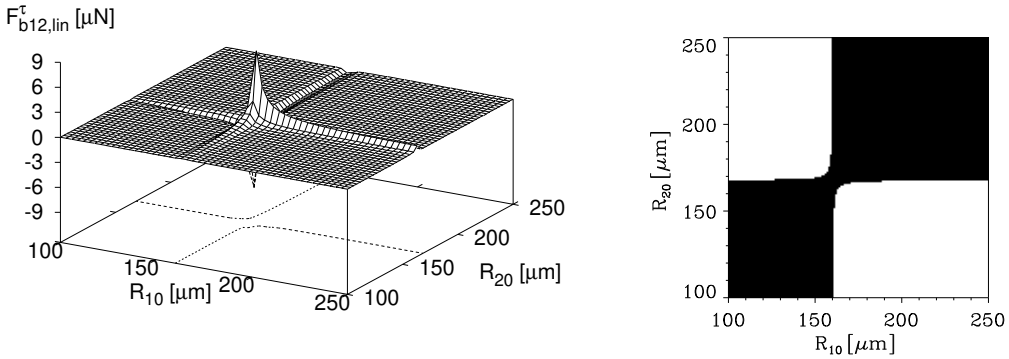

Abbildung 3.3: Sekundäre Bjerkneskraft und Vorzeichen wie in Abbildung 3.1 bei $\tau = T/5$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 15\,\mathrm{mm}$. Die abstoßenden Bereiche entfernen sich zunächst langsam voneinander.

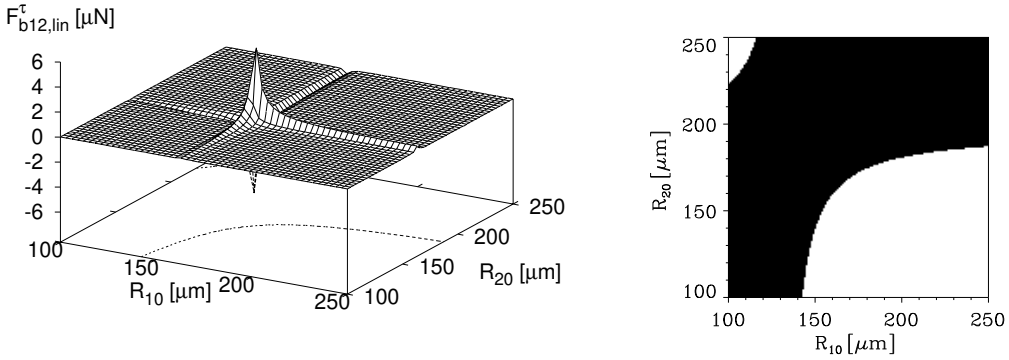

Abbildung 3.4: Sekundäre Bjerkneskraft und Vorzeichen wie in Abbildung 3.1 bei $\tau = T/4.1$, entspricht einem Blasenabstand von $d \approx 18.29\,\mathrm{mm}$. Im Bereich um $\tau = T/4$ ändern sich die Vorzeichen sehr schnell.

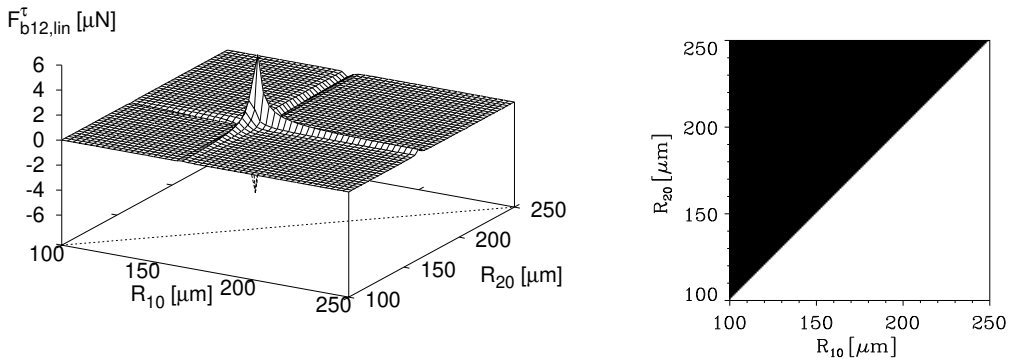

Abbildung 3.5: Sekundäre Bjerkneskraft und Vorzeichen wie in Abbildung 3.1 bei $\tau = T/4$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 18.75\,\mathrm{mm}$. Eine große Blase $R_{20} > R_{10}$ wird von der kleinen angezogen. Eine kleine Blase wird von der großen jedoch abgestoßen.

Ruheradius hat als die erste. Da hier ja die Kraft der ersten auf die zweite Blase dargestellt wird, lässt sich dieses Ergebnis folgendermaßen interpretieren: Eine große zweite Blase wird von einer kleineren ersten Blase angezogen, während aber umgekehrt die kleinere erste Blase von der großen zweiten abgestoßen wird. Somit ergibt sich die Situation in Abbildung 3.6: Ohne weitere äußere Kräfte wie die primäre Bjerkneskraft setzen sich die Blasen nur aufgrund der sekundären Bjerkneskraft in *dieselbe Richtung* in Bewegung. Ein solches Ergebnis ist bemerkenswert, da sich dieses Verhalten ohne Delay bei den gemachten Annahmen nicht voraussagen lässt. In dem Fall gilt ja eine Symmetrie bezüglich der Vertauschung der Indizes und somit stoßen sich die Blasen immer *gegenseitig* ab oder aber ziehen sich *gegenseitig* an [vgl. Gl. (2.13)]. Hier wirkt jedoch die größere abstoßend und die kleinere anziehend, so dass sich auch in jedem Fall der Schwerpunkt beider Blasen bewegt. Dieses widerspricht nicht der Impuls- oder Energieerhaltung, da beides mit dem anregenden Schallfeld ausgetauscht werden kann. Die relative Position der beiden Blasen zueinander kann sich natürlich trotzdem verändern - das hängt von der absoluten Größe der Bjerkneskräfte (primäre und sekundäre) sowie Reibungs- und Trägheitskräften ab. Solche Blasenpaare lassen sich übrigens immer finden, sobald die Austauschsymmetrie der Indizes (also der Ruheradien) bezüglich des Vorzeichens verletzt ist, also im Prinzip bereits bei $\tau \neq 0$, z. B. in Abbildung 3.1. Bei $\tau = T/4$ ist die Symmetrie in diesem Sinne maximal gebrochen, da sich keine Blasenpaare mehr gegenseitig abstoßen oder gegenseitig anziehen. Nur zwischen gleichgroßen Blasen wirkt gar keine Kraft:

$$F_{b12,lin}^{\tau=T/4} = 0 \quad \text{für} \quad R_{10} = R_{20}.$$

Wie aus der Gleichung (3.17) zu erwarten ist (Verschiebung des Kosinus um seine halbe Periodenlänge), kehrt sich diese Sequenz von $\tau = T/4$ bis $\tau = T/2$ genau um, bis in Abbildung 3.8

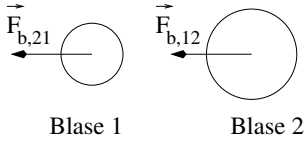

Abbildung 3.6: Sekundäre Bjerkneskräfte bei $\tau = T/4$ für zwei verschieden große Blasen. Sie zeigen in dieselbe Richtung.

das inverse Vorzeichenbild von Abbildung 3.1 zu sehen ist. Eine weitere Erhöhung des Delays würde die Vorzeichenmuster aus den Abbildungen 3.1 bis 3.8 mit jeweils Schwarz und Weiß vertauscht hervorbringen.

Die Einführung eines Delays lässt bereits bei einer Linearisierung des Keller-Miksis-Modells und ohne eine gegenseitige Kopplung der Blasen eine neue Aussage zu, die ohne das Delay nicht möglich ist: Ein Bruch der Symmetrie der sekundären Bjerkneskraft in der R_{10}-R_{20}-Ebene, der in einer Kraft resultiert, die zwei Blasen in eine Richtung bewegt. Dies tritt bei der betrachteten Anregungsfrequenz jedoch erst bei sehr großem Blasenabstand auf, so dass der Betrag dieser Kraft, der ja mit $1/d^2$ abfällt, nicht sehr groß ist und ihr Einfluss unter Umständen nicht sehr relevant für die Dynamik ist.

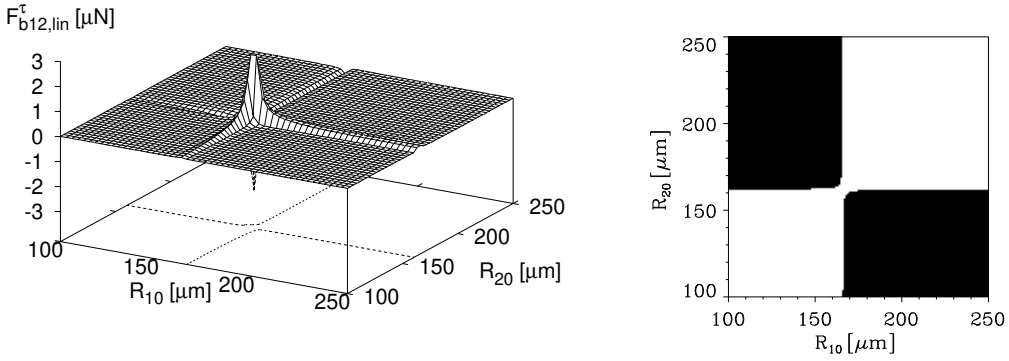

Abbildung 3.7: Bjerkneskraft und Vorzeichen wie in Abbildung 3.1 bei $\tau = T/3$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 25\,\mathrm{mm}$.

3.2 Die linearisierte Keller-Miksis-Gleichung mit Kopplung

Es soll nun in der linearisierten Keller-Miksis-Gleichung ein Kopplungsterm eingeführt werden, der den Einfluss durch den abgestrahlten Schalldruck der einen Blase auf die Dynamik

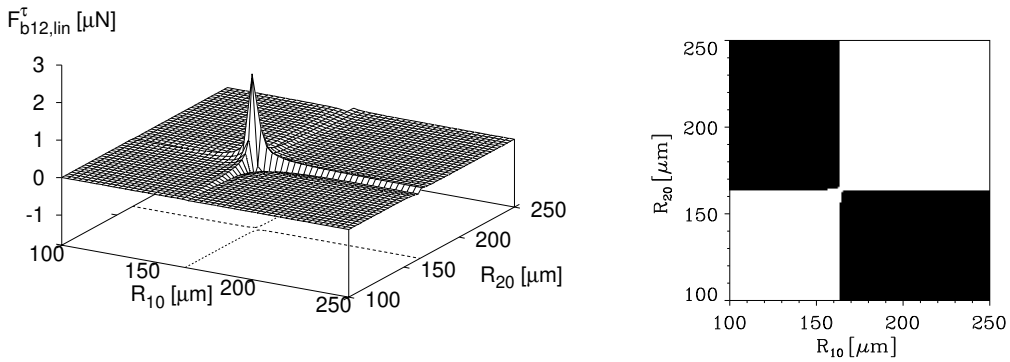

Abbildung 3.8: Bjerkneskraft und Vorzeichen wie in Abbildung 3.1 bei $\tau = T/2$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 37.5\,\mathrm{mm}$. Inverses Vorzeichenbild gegenüber Abb. 3.1. Die gesamte Vorzeichenmusterfolge von $\tau = 0$ bis $\tau = T$, von der hier die erste Hälfte gezeigt wurde, da die zweite Hälfte das entsprechende Verhalten mit umgedrehten Vorzeichen zeigt, wiederholt sich für höhere τ mit der Periodenlänge T.

der anderen in die Bewegungsgleichung einbezieht. Dieser zusätzliche Beitrag zur Anregung einer Blase skaliert mit $1/d$, nimmt also ebenfalls (wie auch die sekundäre Bjerkneskraft) mit zunehmendem Abstand ab. Es wird erwartet, dass auch hier die Symmetrie des instantan gekoppelten Modells aus [25] gebrochen wird. Erneut wird eine kleine Schwingung der Blasen um ihren Ruheradius angenommen, so dass die Gleichung, die für die sekundäre Bjerkneskraft bei harmonischen Blasenschwingungen hergeleitet wurde (3.17), weiterhin gilt. Aber es liegen nun keine einzelnen periodisch getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillatoren mehr vor, sondern zwei nichtlinear gekoppelte.

3.2.1 Theorie

Etwas allgemeiner als in Gleichung (3.2) lautet die linearisierte Keller-Miksis-Gleichung:

$$\ddot{R}'_j + \alpha \dot{R}'_j + \omega^2 R'_j = -\frac{1}{\rho R_{j0}} p_{ex} \,, \tag{3.18}$$

wobei p_{ex} äußere Wechseldruck ist. Es wird auch hier wieder die komplexe Schreibweise verwendet. Somit gilt für den anregenden Druck der zweiten Blase (s. Abschnitt 2.1 für den neu hinzugekommenen Kopplungsterm):

$$p_{ex} = p_a e^{i\omega t} + \frac{\rho}{d} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(R_{1\tau}^2 \dot{R}_{1\tau} \right) .$$

Die linearisierte Keller-Miksis-Gleichung mit Kopplung für die zweite Blase im Abstand d von der ersten lautet also:

$$\ddot{R}_2' + \alpha_2 \dot{R}_2' + \omega_{20}^2 R_2' = -\frac{1}{\rho R_{20}} \left[p_a e^{i\omega t} + \frac{\rho}{d} \left(2R_{1\tau} \dot{R}_{1\tau}^2 + R_{\tau 1}^2 \ddot{R}_{1\tau} \right) \right]. \tag{3.19}$$

Schwingt nun die erste Blase sinusförmig mit kleiner, reeller Auslenkung $\hat{R}_1$ und mit einer Phase φ_1 zum anregenden Schallfeld,

$$R_1(t) = R_{10} + \hat{R}_1 e^{i\varphi_1} e^{i\omega t},$$

so gilt mit einem weiteren Phasenfaktor $e^{-i\omega\tau}$ durch die endliche Laufzeit des Schalls am Ort der zweiten Blase

$$\begin{aligned} \left(2R_{1\tau} \dot{R}_{1\tau}^2 + R_{1\tau}^2 \ddot{R}_{1\tau} \right) = & - \hat{R}_1 \left(R_{10}^2 \omega^2 e^{i\varphi_1} e^{-i\omega\tau} e^{i\omega t} \right) \\ & - \hat{R}_1^2 \left(4R_{10} \omega^2 e^{2i\varphi_1} e^{-2i\omega\tau} e^{2i\omega t} \right) \\ & - \hat{R}_1^3 \left(3\omega^2 e^{3i\varphi_1} e^{-3i\omega\tau} e^{3i\omega t} \right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Bis auf Terme höherer Ordnung in $\hat{R}_1$ hat nun Gleichung (3.19) die Form

$$\ddot{R}_2' + \alpha_2 \dot{R}_2' + \omega_{20}^2 R_2' = -\frac{1}{\rho R_{20}} \left(p_a e^{i\omega t} - \frac{\rho}{d} \hat{R}_1 R_{10}^2 \omega^2 e^{i\varphi_1} e^{-i\omega\tau} e^{i\omega t} \right). \tag{3.21}$$

Die Schwingung von R_2 ist ja ebenfalls sinusförmig um ihren Ruheradius angenommen:

$$R_2(t) = R_{20} + \hat{R}_2 e^{i\varphi_2} e^{i\omega t}.$$

Einsetzen in (3.21) und Umstellen liefert:

$$\begin{aligned} \hat{R}_2 e^{i\varphi_2} \gamma_2 &= \beta_2 + \delta_2 e^{i\varphi_1} \hat{R}_1 \qquad (3.22) \\ &\text{mit} \\ \gamma_2 &= \omega_{20}^2 - \omega^2 + i\alpha_2\omega \\ \beta_2 &= -\frac{p_a}{\rho R_{20}}, \\ \delta_2 &= \frac{R_{10}^2 \omega^2}{d R_{20}} e^{-i\omega\tau}. \end{aligned}$$

Mit $x_j = \hat{R}_j e^{i\varphi_j}$ erhält man nun für beide Blasen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 \gamma_1 &= \beta_1 + \delta_1 x_2, \\ x_2 \gamma_2 &= \beta_2 + \delta_2 x_1, \end{aligned} \tag{3.23}$$

wobei γ_1,β_1 und δ_1 analog zu γ_2,β_2 und δ_2 mit vertauschten Indizes definiert sind. Die Lösung ist:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\beta_1\gamma_2 + \beta_2\delta_1}{\gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2}, \\ x_2 &= \frac{\beta_2\gamma_1 + \beta_1\delta_2}{\gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Also ist z. B.

$$x_1 = \frac{p_a}{\rho} \frac{-\frac{1}{R_{10}}\left(\omega_{20}^2 - \omega^2 + i\alpha_2\omega\right) - \frac{R_{10}}{R_{20}}\frac{\omega^2}{d}e^{-i\omega\tau}}{\left(\omega_{10}^2 - \omega^2 + i\alpha_1\omega\right)\left(\omega_{20}^2 - \omega^2 + i\alpha_2\omega\right) - R_{10}R_{20}\frac{\omega^4}{d^2}e^{-2i\omega\tau}} \tag{3.25}$$

und x_2 entsprechend.

Aus x_1 und x_2 wurden numerisch die Phasen φ_j vermöge

$$\varphi_j = \arg\left(\frac{\mathrm{Im}\, x_j}{\mathrm{Re}\, x_j}\right) \tag{3.26}$$

und die Amplituden $\hat{R}_j$ nach

$$\hat{R}_j = \left|x_j\right| \tag{3.27}$$

bestimmt. Anhand Gleichung (3.25) erkennt man, dass die Amplituden $\hat{R}_j$ linear mit dem Anregungsdruck p_a. Die nun folgenden Gebirgsabbildungen sehen also (wie auch schon vorher beim ungekoppelten Fall) für beliebige Anregungsdruckamplituden p_a identisch aus, lediglich die Höhen müssen linear skaliert werden.

Um nun einen Eindruck zu bekommen, wie die x_1-Landschaft aussieht, zeigt Abbildung 3.9 die Amplituden der $\hat{R}_1 = |x_1|$ der ersten Blase (links) und $\hat{R}_2 = |x_2|$ der zweiten Blase (rechts) für $\tau = T/100$ und $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$. In weiten Gebieten dieser Ebene ist die Amplitude der Schwingung um den Ruheradius $\hat{R}_j$ sehr klein. Auf dem Resonanzradius der jeweiligen Blase jedoch kommt es zu einem extremen Aufschwingen der Blase. Das führt zu Amplituden, die an einigen Stellen sogar größer als der Ruheradius selbst sind. An solchen Punkten gilt also die Annahme einer kleinen Schwingung um R_{j0} nicht mehr, und die Lösungen werden sogar unphysikalisch (negativer Radius). Durch die starke Kopplung kommt es auch zu einer stärkeren Schwingung bei der ersten Blase, wenn die zweite in der Nähe ihres Resonanzradius ist, und umgekehrt im rechten Bild.

Im Falle von kleinem Delay (Abbildungen 3.9 und 3.10) ergibt sich für $\hat{R}_j$ ein kreuzförmiges Muster mit verschiedenen Maxima. Interessanterweise gibt es gerade dann, wenn beide Blasen auf Resonanzgröße sind, keine starken Schwingungen, sondern eine Art „destruktive Interferenz“ von Anregungs- und Kopplungsdruck (man beachte die unterschiedlichen Vorzeichen in Gleichung (3.21), rechte Seite). Für größeres Delay, und damit mit abnehmender Kopplung, zeigen die folgenden Abbildungen (3.11 bis 3.12) lediglich den vom ungekoppelten Fall her zu erwartenden Kamm beim Resonanzradius der jeweiligen Blase mit einem Einschnitt, wenn auch die andere Blase ihren Resonanzruheradius hat. Dies kommt durch die erwähnte Interferenz.

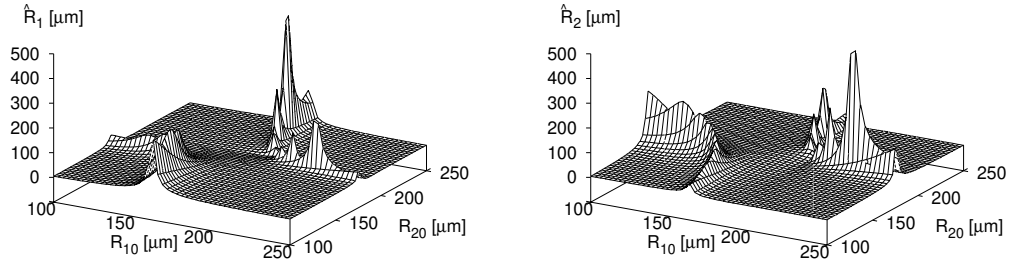

Abbildung 3.9: Die Amplituden $\hat{R}_1 = |x_1|$ der ersten Blase (links) und $\hat{R}_2 = |x_2|$ der zweiten Blase (rechts) in der R_{10}-R_{20}-Ebene bei einem Delay von $\tau = T/100$ und $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$. Man sieht, dass sich die Blasen an ihrer Resonanz leicht auf das doppelte ihres Ruheradius aufziehen. Dort gilt also die gemachte Annahme nicht mehr, dass die Blase mit kleiner Amplitude um ihren Ruheradius schwingt. Es zeigt sich (vgl. Abb. 3.13), dass die Bjerkneskräfte wesentlich durch diese Größen $\hat{R}_j$ bestimmt werden.

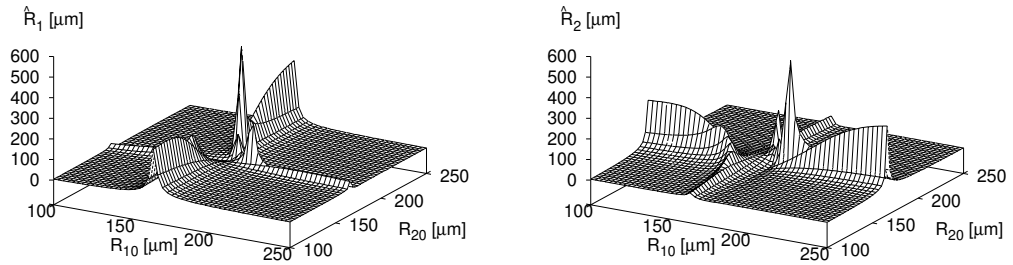

Abbildung 3.10: Die Amplituden $\hat{R}_1 = |x_1|$ der ersten Blase (links) und $\hat{R}_2 = |x_2|$ der zweiten Blase (rechts) in der R_{10}-R_{20}-Ebene bei einem Delay von $\tau = T/50$. Das kreuzförmige Muster aus Abb. 3.9 schließt sich mehr zur Mitte. Die Maxima verschmelzen zu einem Kamm.

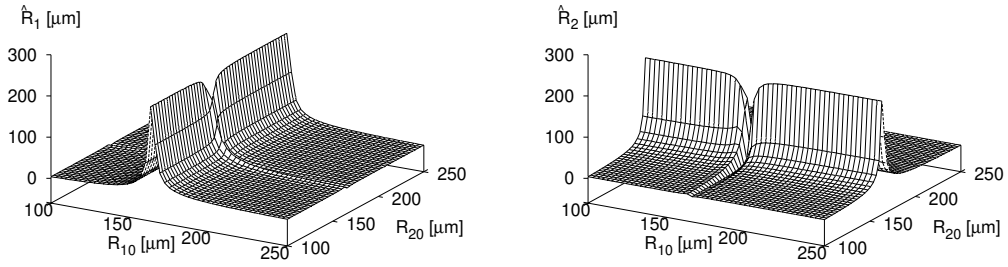

Abbildung 3.11: Die Amplituden $\hat{R}_1 = |x_1|$ der ersten Blase (links) und $\hat{R}_2 = |x_2|$ der zweiten Blase (rechts) in der R_{10}-R_{20}-Ebene bei einem Delay von $\tau = T/10$ und einem Anregungsdruck $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$. Die Kopplung der Blasen hat schon so weit abgenommen, dass im Wesentlichen ein Kammmuster zu sehen ist, bei dem die Blase an ihrer Resonanz auf etwa $2 \cdot R_{j0}$ aufschwingt. Für geringere Drücke ergibt sich aber keine andere Geometrie, da die Amplitude der Schwingung linear mit p_a skaliert.

Wie die letzte Abbildung, Abb. 3.12 zeigt, wird auch der Einschnitt beim Resonanzradius der benachbarten Blase mit zunehmenden Abstand immer weiter geglättet. Für großes Delay erhält man ein beinahe reines Resonanzverhalten, ohne nennenswerten Einfluss der Kopplung.

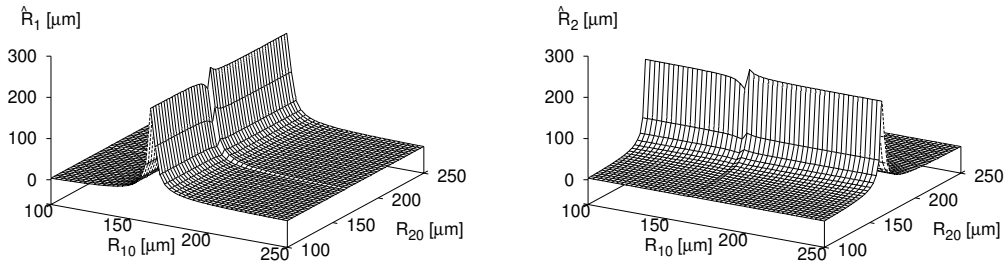

Abbildung 3.12: Die Amplituden $\hat{R}_1 = |x_1|$ der ersten Blase (links) und $\hat{R}_2 = |x_2|$ der zweiten Blase (rechts) in der R_{10}-R_{20}-Ebene bei einem Delay von $\tau = T/2$. Die Amplitude der Schwingung um den Ruheradius zeigt ein beinahe reines Resonanzverhalten, ohne nennenswerten Einfluss der Kopplung.

3.2.2 Ergebnisse

Zur Berechnung der sekundären Bjerkneskraft nach Formel (3.17) wurden φ_j und $\hat{R}_j$ nach den Gleichungen (3.26) und (3.27) bestimmt, und in den Abbildung 3.13 bis 3.20 wurde der Betrag der sekundären Bjerkneskraft nach dem linearisierten, delay-gekoppelten Modell, $F_{bj,lk}$, aufgetragen. Der Anregungsdruck betrug wieder $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$ und die Anregungsfrequenz $\nu = 20\,\mathrm{kHz}$.

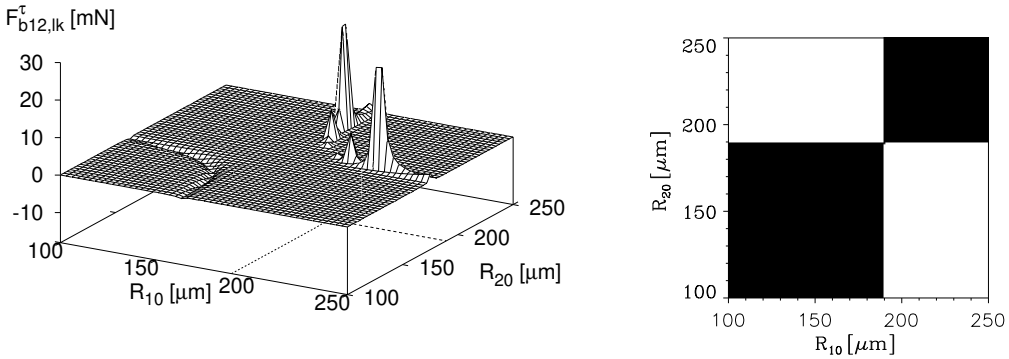

Abbildung 3.13: Links: sekundäre Bjerkneskraft für den Fall gekoppelter Blasen bei harmonischer Schwingung und $\tau = T/100$, entspricht $d = 0.75\,\mathrm{mm}$. Der anregende Schalldruck beträgt $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$. Rechts: Das Vorzeichen der sekundären Bjerkneskraft. Die Ruheradien, bei denen der Vorzeichenwechsel stattfindet, sind gegenüber dem nicht gekoppelten Fall erhöht (vgl. Abb. 3.1). Die Ruheradien, bei denen die sekundäre Bjerkneskraft sehr groß wird, liegen weit außen in der dargestellten Ebene, was man durch Vergleich mit der Abbildung 3.9 leicht versteht. Man beachte die Einheit der Kraft: mN in dieser und der nächsten Abbildung (3.14) statt μN wie in allen anderen Abbildungen in diesem Abschnitt.

In Abbildung 3.13 fällt sofort auf, dass sich die Ruheradien, bei denen in der sekundären Bjerkneskraft das Vorzeichen wechselt, zu höheren Radien verschoben haben. Bei $\tau = T/100$ liegen sie bei bei etwa $189\,\mu$m. Eine Diskussion hierzu findet sich später in diesem Abschnitt. Da der Unterschied der Abbildungen 3.13 und 3.15 sehr groß ist, wurde noch ein weiterer Wert, $\tau = T/50$ in die Serie mit aufgenommen, um zu betrachten, wie sich die Bjerkneskraftlandschaft bei sehr kleinem Delay verändert.

Was in Abbildung 3.15 weiter gegenüber Abbildung 3.2 auffällt ist, dass die ausgezeichneten Flächen, die jeweils das gleiche Vorzeichen der sekundären Bjerkneskraft anzeigen, noch nicht sichtbar auseinander gegangen sind. Dies wird auch in den darauffolgenden Abbildungen jeweils im Vergleich zum entsprechenden Bild aus Abschnitt 3.1.2 sichtbar. Das Intervall um $\tau = T/4$, in dem die Symmetrie sich plötzlich verliert und die Gebiete gleichen Vorzei-

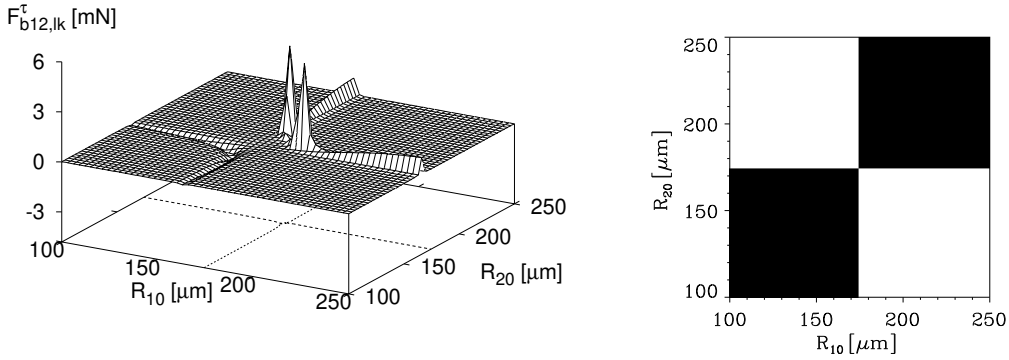

Abbildung 3.14: Sekundäre Bjerkneskraft für delay-gekoppelt schwingende Blasen wie in Abbildung 3.13 sowie Vorzeichen bei $\tau = T/50$, entspricht $d = 1.5\,\mathrm{mm}$. Hierzu gibt es keine vergleichbare Abbildung im ungekoppelten Fall, da sich dort zwischen $\tau = T/100$ und $\tau = T/50$ kaum etwas ändert. Hier jedoch liegen die Vorzeichenwechsel durch die geringere Kopplung bei doppeltem Abstand gegenüber Abbildung 3.13 wieder bei geringeren Ruheradien. Die Resonanzkämme wachsen von außen heran.

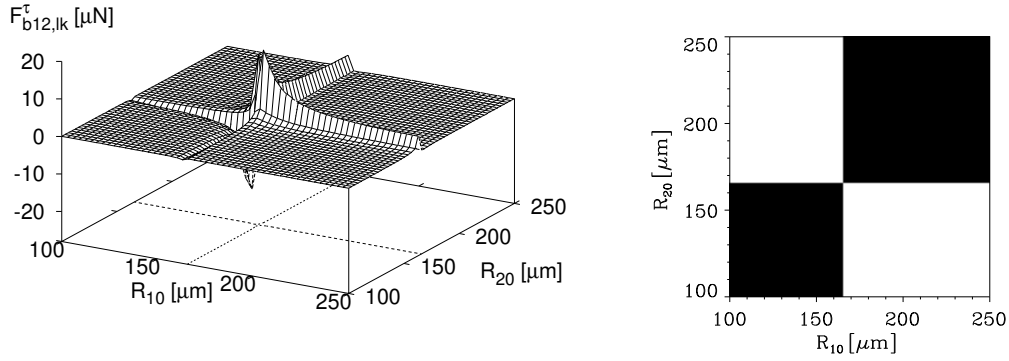

Abbildung 3.15: Sekundäre Bjerkneskraft für delay-gekoppelt schwingende Blasen wie in Abbildung 3.13 sowie Vorzeichen bei $\tau = T/10$, entspricht $d = 7.5\,\mathrm{mm}$. Die Situation gleicht beinahe der des ungekoppelten Falls aus Abbildung 3.2. Die Vorzeichenwechsel liegen bei leicht höheren Ruheradien (etwa $165\,\mu\mathrm{m}$ statt $163\,\mu\mathrm{m}$). Man erkennt auch das Verhalten der Resonanzradien, das in Abschnitt 3.2.1 betrachtet wurde, wieder. Durch die abnehmende Kopplung nähern sich die Muster einem Kamm beim Resonanzradius.

chens sich schnell verlagern, ist kleiner geworden.

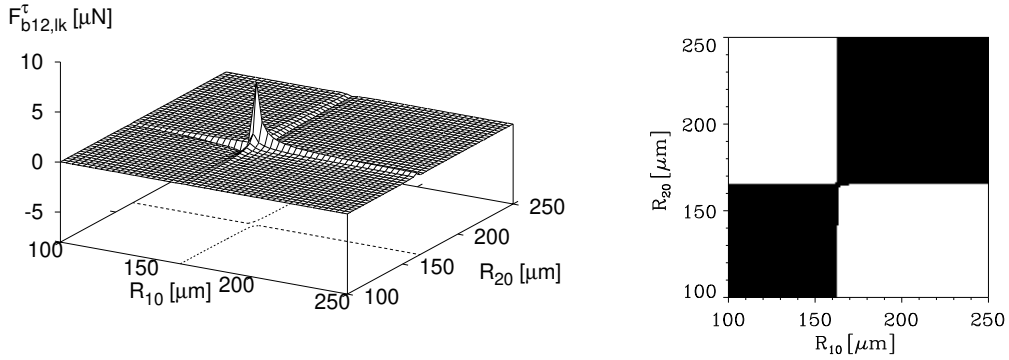

Abbildung 3.16: Sekundäre Bjerkneskraft für delay-gekoppelt schwingende Blasen wie in Abbildung 3.13 sowie Vorzeichen bei $\tau = T/5$, entspricht $d = 15\,\text{mm}$. Der Vergleich mit Abbildung 3.3 zeigt keinen Unterschied bei den Vorzeichenwechseln, die Flächen sind jedoch noch nicht so weit auseinander gedriftet. Die Kämme werden durch die größere Entfernung der Blasen flacher. Der Betrag der Kraft unterscheidet sich nicht mehr wesentlich vom ungekoppelten Fall.

Die Bilder für $\tau = T/5$ bis $\tau = T/2$ ähneln denen im Fall ungekoppelter Blasen. Im Bereich um $\tau = T/4$ ändert sich das Vorzeichenmuster sehr schnell und bei $\tau = T/2$ sind die Vorzeichen gerade umgedreht zu denen bei $\tau \approx 0$. Der Betrag der sekundären Bjerkneskraft ist bei sehr kleinem Delay größer als bei ungekoppelt schwingenden Blasen, was sich aber mit zunehmendem Abstand ändert. Der Vergleich mit den Abbildungen 3.9 bis 3.12 aus Abschnitt 3.2.1 erklärt die bereits angesprochene Verteilung der Extremwerte der sekundären Bjerkneskraft. Dort wurde die Amplitude $\hat{R}_j$ der j-ten Blase gezeigt, und es wurde festgestellt, dass dieses Muster durch die abnehmende Kopplung an Komplexität verliert und sich zu einem einfachen Kamm am Resonanzradius der jeweiligen Blase entwickelt. Dieses Verhalten bestimmt auch wesentlich die sekundären Bjerkneskraft-Gebirge, bei denen sich ein ähnliches Verhalten erkennen lässt. Während in der Abbildung 3.13 bei einem Delay von $\tau = T/100$ noch ein Muster zu sehen ist, in dem die auffälligen Gebiete von dem Punkt, an dem beide Blasen ihre Resonanzruheradien haben, entfernt sind, nähern sie sich für abnehmende Kopplung diesem Punkt immer mehr an. Die Kämme der sekundären Bjerkneskräfte bei den Resonanzradien werden immer deutlicher, bis sie durch die große Entfernung der Blasen stark abgeschwächt werden. Ein Vergleich der Abbildungen 3.13 bis 3.15 mit den Abbildungen 3.9 bis 3.11 zeigt eine deutliche Ähnlichkeit. Zunächst liegen die hohen Berge der Amplituden- bzw. Bjerkneskraft-Gebirge weit außen in der betrachteten Ebene, dann wandern diese Gipfel zum zentralen Punkt, an dem beide Blasen ihren Resonanzruheradius haben, und von außen wächst ein Kamm heran, der dann im dritten Bild dieser Sequenz die Struktur des Gebirges

wesentlich bestimmt. Die Bilder für größeres Delay werden dann ebenfalls von diesem Kamm bestimmt. Der Einfluss der Kopplung hat gemäß seinem $1/d^2$-Abfall stark abgenommen.

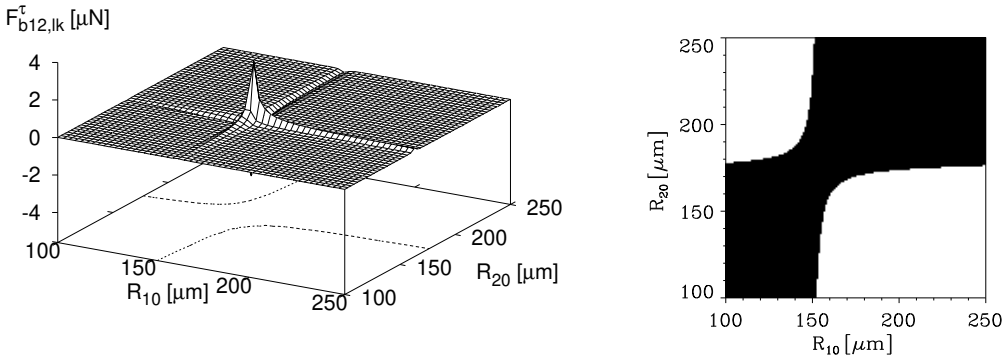

Abbildung 3.17: Sekundäre Bjerkneskraft für delay-gekoppelt schwingende Blasen wie in Abbildung 3.13 sowie ihr Vorzeichen bei $\tau = T/4.1$, entspricht $d \approx 18.29\,\mathrm{mm}$. Der obere abstoßende Bereich ist bei weitem noch nicht so weit aus dem dargestellten Ausschnitt der R_{10}-R_{20}-Ebene gewandert wie in Abbildung 3.4.

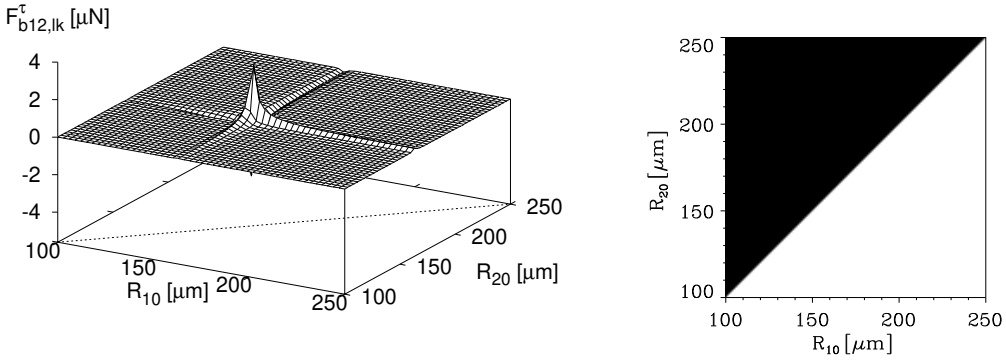

Abbildung 3.18: Sekundäre Bjerkneskraft für delay-gekoppelt schwingende Blasen wie in Abbildung 3.13 sowie ihr Vorzeichen bei $\tau = T/4$, entspricht $d = 18.75\,\mathrm{mm}$. Die Symmetrie der instantan wechselwirkenden Blasen ist „maximal gebrochen“ (vgl. Abb. 3.5).

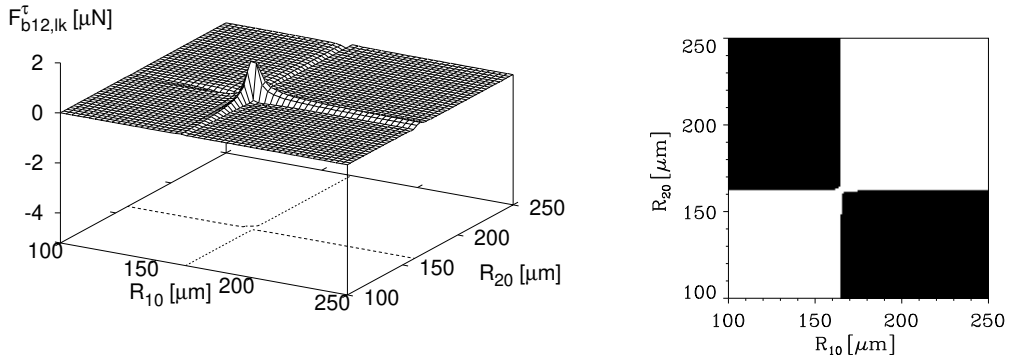

Abbildung 3.19: Sekundäre Bjerkneskraft für delay-gekoppelt schwingende Blasen wie in Abbildung 3.13 sowie ihr Vorzeichen bei $\tau = T/3$, entspricht $d = 25\,\text{mm}$. Zu Abbildung 3.7 ist kein Unterschied in der Verteilung der Vorzeichen zu erkennen.

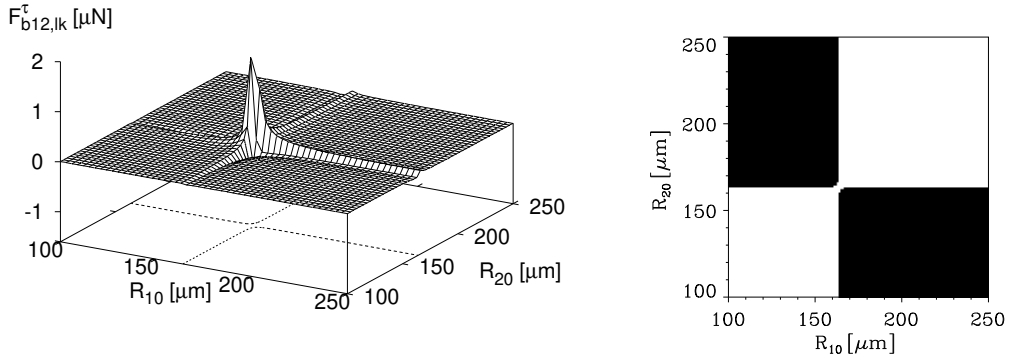

Abbildung 3.20: Sekundäre Bjerkneskraft für delay-gekoppelt schwingende Blasen wie in Abbildung 3.13 sowie ihr Vorzeichen bei $\tau = T/2$, entspricht $d = 37.5\,\text{mm}$. Wie in Abschnitt 3.1.2 ist auch hier das Vorzeichen gegenüber der ersten Abbildung der Serie (3.13) umgedreht. Für größere τ wiederholt sich die ganze Serie wie in Abbildung 3.8 beschrieben.

Kapitel 4
Ergebnisse der numerischen Simulationen

In der Literatur zur Kavitationsblasendynamik und Strukturbildung wurden in Bezug auf die sekundäre Bjerkneskraft bisher überwiegend harmonische Schwingungen untersucht ([9], [10], [17], [37]). Diese Ansätze wurden in Kapitel 3 bereits um ein Delay erweitert, womit eine endliche Laufzeit des Schalldrucks im Medium berücksichtigt wird. Die Auswirkungen *nichtlinearer* Blasenschwingungen auf die sekundären Bjerkneskräfte sind erst seit jüngstem Gegenstand meist numerischer Untersuchungen ([25], [28]). In diesem Abschnitt werden nun die Ergebnisse der linearen Gleichungen mit denen des vollen nichtlinearen, delaygekoppelten Systems (2.18) (2.19) verglichen sowie auf höhere Anregungsdrücke erweitert, bei denen die linearen Näherungen nicht mehr gelten, die jedoch für die tatsächliche Modellierung der Strukturbildung relevant sind.

4.1 Sekundäre Bjerkneskraft bei geringen Drücken

Bei geringen Drücken p_a von 1 kPa und 10 kPa erwartet man ein ähnliches Ergebnis wie von der linearisierten Keller-Miksis-Gleichung, da die Nichtlinearitäten hier noch nicht so stark zum Tragen kommen. Die erste Serie von Abbildungen 4.1 bis 4.8 zeigt wie auch schon in Kapitel 3 die diesmal jedoch nach dem nichtlinearen Modell berechnete sekundäre Bjerkneskraft $F_{bj,nl}$ sowie ihr Vorzeichen für $\tau = T/100$, $\tau = T/50$, $\tau = T/10$, $\tau = T/5$, $\tau = T/4.1$, $\tau = T/4$, $\tau = T/3$ und $\tau = T/2$ zunächst bei einem anregenden Schalldruck von 1 kPa in der R_{10}-R_{20}-Ebene.
Ein Problem der numerischen Simulation liegt bei Blasenparametern, die zu einer chaotischen Lösung führen oder aber eine sehr lange Einschwingphase haben, bis sich eine stabile Schwingung ergibt. Das Programm berücksichtigte dabei Lösungen mit einer Periodizität ≤ 4. In solchen Fällen ist es schwierig, die zeitliche Mittelung aus Gleichung (2.11) durchzuführen. Unter Umständen ist die sekundäre Bjerkneskraft in einem Intervall $[t_1 = N \cdot T; t_2 = (N+1) \cdot T]$ eine andere als in dem darauffolgenden T-Intervall. Daher ist zur Bewertung der Ergebnisse meist auch ein Blick auf die Einschwingzeiten notwendig. Die Ergebnisse sollten sich mit längeren Einschwingphasen nicht mehr substanziell ändern, um als ordentlich angesehen werden zu können.
Abbildung 4.1 zeigt die Situation für $\tau = T/100$. Die auffälligste Veränderung zu den Ergeb-

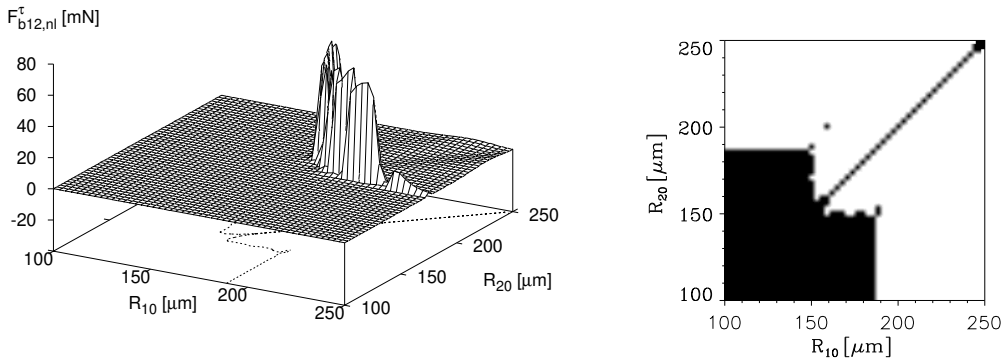

Abbildung 4.1: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/100$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 0.75\,\mathrm{mm}$. Der Schalldruck der Anregung beträgt $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$. Anziehende Kräfte für gleich große Blasen, aber sonst bei großen Ruheradien keine Anziehung entgegen den Ergebnissen der linearen Modelle (vgl. mit Abb. 3.1 und Abb. 3.13).

nissen der linearen Theorie ist, dass sich zwar Blasen mit gleichem Ruheradius auch weiterhin gegenseitig anziehen, sich jedoch in bei großen Ruheradien abstoßen, sobald sie sich unterscheiden. Dies steht im Gegensatz zu den sekundären Bjerkneskräften, die sich aus der Linearisierung der Keller-Miksis-Gleichung ergeben haben. Dort stoßen sich gleich große Blasen erst bei einem Delay $\tau > T/4$ gegenseitig ab. Dieses spricht dafür, dass die Linearisierung der Keller-Miksis-Gleichung in dem Fall sehr kleinen Delays nicht gerechtfertigt ist. Einige Beobachtungen finden sich auch hier wieder. So bleibt die Verlagerung der Extremwerte der sekundären Bjerkneskraft sowie die Verschiebung der vorzeichenwechselnden Ruheradien zu höheren Werten ist zu erkennen.

Bei $\tau = T/50$ in Abbildung 4.2 findet sich dagegen wieder das gewohnte Bild wie in der entsprechenden Abbildung 3.14. Die Grenzen der ausgezeichneten Flächen sind etwas „angeknabbert“, und durch eine hier benutzte Interpolation (es wurde nur ein Drittel der Daten berechnet, die beim linearisierten Modell vorhanden waren) etwas verschwommen. Am Rand der dargestellten Ebene lässt sich nicht mehr interpolieren, was dazu führt, dass dort die Felder gleichen Vorzeichens scharf begrenzt sind. Dies fällt nur bei genauem Hinsehen auf. Das Ergebnis stimmt gut mit dem aus Abbildung 3.14 überein bis auf einen kleinen Bereich in der Mitte, in dem eine (zur Winkelhalbierenden symmetrische) Unregelmäßigkeit sichtbar wird. Auch die Verschiebung der vorzeichenwechselnden Ruheradien zu höheren Werten gegenüber dem nicht gekoppelten Fall wird hier durch das volle Modell bestätigt, sowie die Entwicklung bei größerem Delay, die Annäherung an die nicht gekoppelten Werte in der Nähe von $160\,\mu\mathrm{m}$, bei $\tau = T/10$ in Abbildung 4.3.

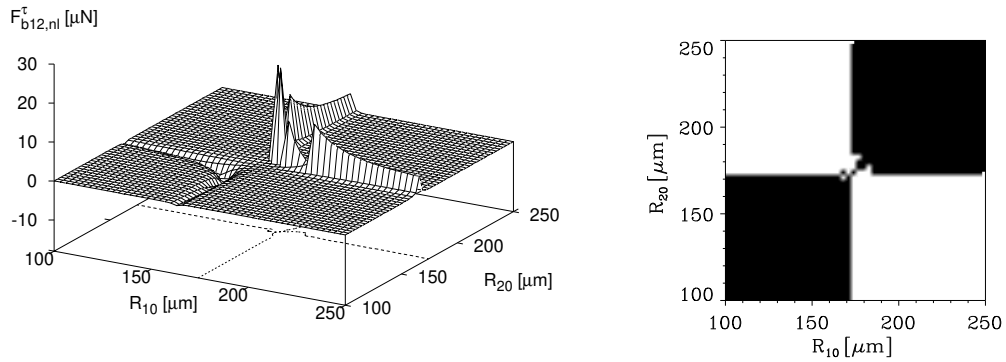

Abbildung 4.2: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/50$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 1.5\,\mathrm{mm}$. Anregung mit $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$. Die Verschiebung der Ruheradien, bei denen das Vorzeichen wechselt, finden sich auch hier wieder wie in der linearen Näherung mit Kopplung (vgl. Abb. 3.14).

Ein weiterer wesentlicher Unterschied in der linearen Näherung zwischen dem gekoppelten und dem ungekoppelten Fall ist das spätere Auseinanderdriften der abstoßenden Bereiche bei τ-Werten näher an $T/4$. Auch dieses findet sich im nichtlinearen Modell bestätigt, wie man durch Vergleich der Abbildung 4.3 mit den Abbildungen aus der linearen Näherung 3.2 (ungekoppelt) und 3.15 (gekoppelt) feststellt.

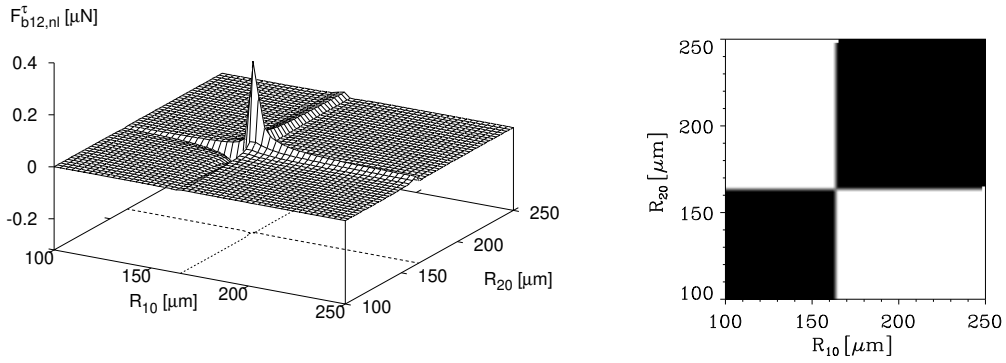

Abbildung 4.3: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/10$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 7.5\,\mathrm{mm}$, und einem anregenden Schalldruck $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$. Die Vorzeichenwechsel bewegen sich genau wie im linearisierten Modell mit Kopplung zu kleineren Ruheradien (vgl. Abb. 3.2 u. Abb. 3.15).

In den folgenden Abbildungen, die die Situation für $\tau = T/5$ bis $\tau = T/2$ zeigen, erkennt man

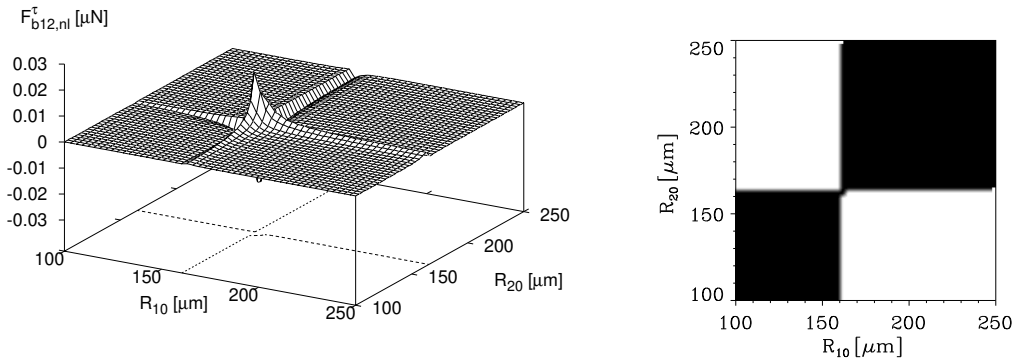

Abbildung 4.4: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/5$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 15\,\mathrm{mm}$, und einem anregenden Schalldruck $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$. Wie im Fall der delay-gekoppelten, harmonisch schwingenden Blasen in Abb. 3.16 entfernen sich die Flächen gleichen Vorzeichens langsamer voneinander als in Abb. 3.3.

das aus der linearen Theorie vorhergesagte Verhalten wieder. Lediglich einige kleine Unregelmäßigkeiten sind in den Bildern zu sehen, die zumeist den beginnenden Einfluss der Nichtlinearitäten wiederspiegeln. Sie ließen sich auch durch eine längere Einschwingphase nicht bereinigen, so dass man davon ausgehen darf, dass die weiterhin sichtbaren Effekte durch die Nichtlinearität hervorgerufen werden. Sie ändern jedoch nichts an der groben Struktur der Muster. Wie gewohnt erhält man für $\tau = T/4$ in Abbildung 4.6 die durch die Winkelhalbierende geteilte R_{10}-R_{20}-Ebene (hier mit zusätzlichen Mustern in der Nähe des Vorzeichenwechsels) und bei $\tau = T/2$ die umgekehrten Vorzeichen.
Auch die mit zunehmendem Abstand schwächer werdende Kopplung, die sich in der Geometrie des Bjerkneskraftgebirges als eine Verlagerung der Spitzen zum zentralen Punkt und eine Dominanz der „Resonanzkämme“ wiederspiegelt, ist hier zu beobachten. Bei $\tau = T/100$ liegen die Gipfel noch bei hohen Ruheradien, bei $\tau = T/10$ bereits in der Nähe des Punktes, an dem beide Blasen einen Ruheradius beim Resonanzradius haben, wobei von außen die charakteristischen Kämme heranwachsen. Und bei allen größeren Abständen liegen die Extremwerte in der Mitte.

Die zweite Serie in diesem Abschnitt zeigt die Situation für die üblichen τ-Werte bei einem anregenden Schallfeld von 10 kPa. Es wird also der Fall betrachtet, bei dem die sekundären Bjerkneskräfte in der linearen Näherung in Kapitel 3 dargestellt wurden. Dieser Anregungsdruck liegt bei einem Druck, der die Linearisierbarkeit nicht mehr unbedingt gewährleistet. Damit ist die Möglichkeit gegeben, die Grenzen der Gültigkeit abzuschätzen. Es wurde gezeigt, dass für einen anregenden Schalldruck von 1 kPa, der im linearisierten Modell qualitativ die gleichen Ergebnisse liefert wie ein höherer, da die Amplitude der Schwingung ja linear

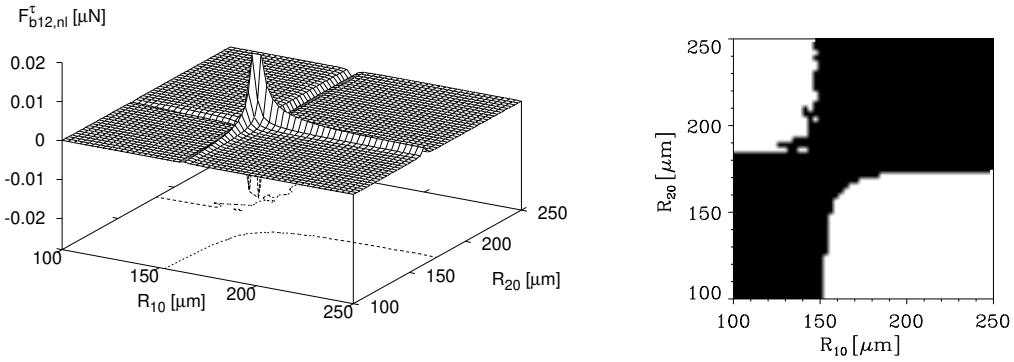

Abbildung 4.5: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/4.1$, entspricht einem Blasenabstand von $d \approx 18.29\,\mathrm{mm}$. Die Anregung erfolgte in dieser Serie mit $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$ (vgl. Abb. 3.4 und Abb. 3.17).

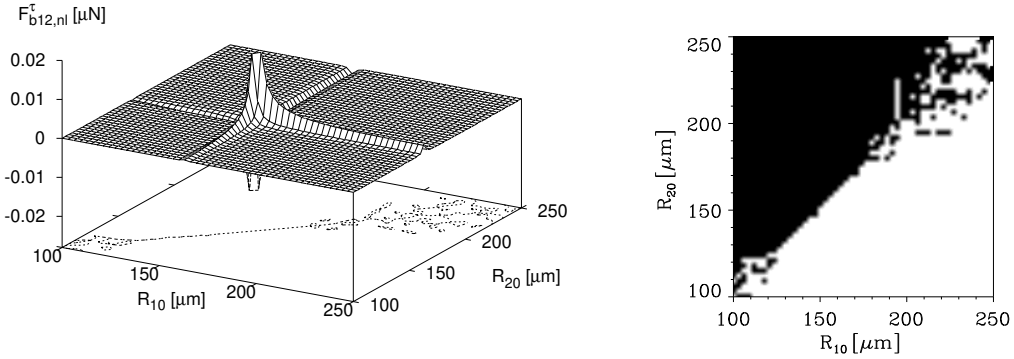

Abbildung 4.6: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/4$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 18.75\,\mathrm{mm}$, und dem anregenden Schalldruck $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$. Auch hier findet sich die „maximal gebrochene“ Symmetrie (im Sinne von Abschnitt 3.1.2). Nichtlinearitäten überlagern noch ein weiteres, feineres Muster über die Winkelhalbierende aus der linearen Theorie (vgl. Abb. 3.5 und Abb. 3.18.

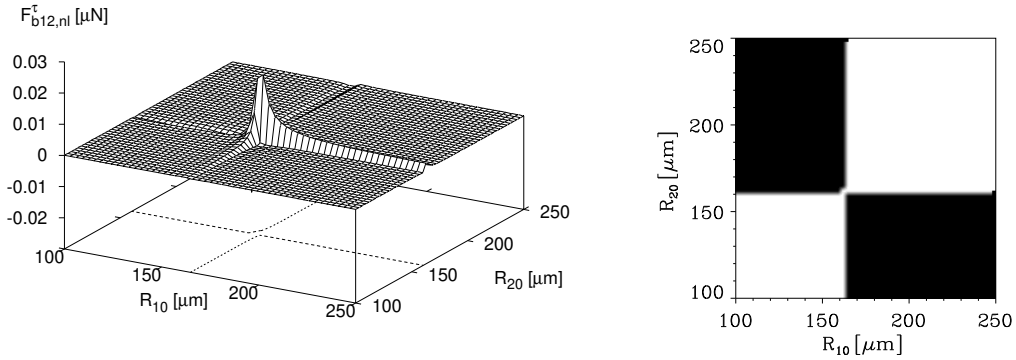

Abbildung 4.7: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/3$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 25\,\mathrm{mm}$, und dem anregenden Schalldruck $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$. Umdrehen der Vorzeichen für $\tau > T/4$ wie auch in den Abbildungen 3.7 und 3.19.

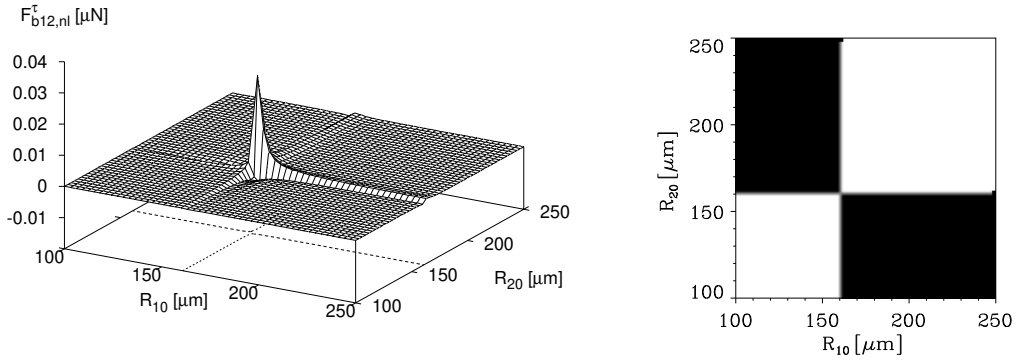

Abbildung 4.8: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/2$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 37.5\,\mathrm{mm}$, und dem anregenden Schalldruck $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$. Für größere τ wiederholt sich die Serie der Vorzeichenmuster mit der Periodenlänge T wie in Abb. 3.8 (vgl. auch Abb. 3.20).

(vgl. Gl. (3.11) und Gl. (3.25)) und somit die sekundäre Bjerkneskraft quadratisch mit p_a skaliert (vgl. Gl. (3.17), in der der Druck nur in den Amplituden beider Blasen je einmal auftaucht), die Ergebnisse aus der Linearisierung gut wiedergefunden werden konnten. Nun soll untersucht werden, ob sich das bei einem höheren Schalldruck immer noch ergibt. Die gezeigten Abbildungen sind also einerseits mit ihren Pendants aus der ersten Serie dieses Abschnitts zu vergleichen, um den Effekt, den der höhere Schalldruck bewirkt, zu studieren, andererseits mit denen aus Abschnitt 3.2.2, um den Einfluss der Nichtlinearitäten zu betrachten.

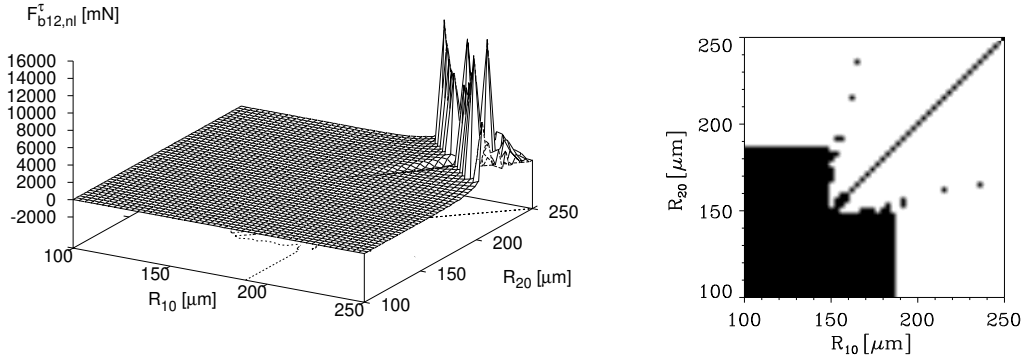

Abbildung 4.9: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/100$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 0.75\,\mathrm{mm}$, und bei einem anregenden Schalldruck von $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$. Es lassen sich die Ruheradien ablesen, bei denen sich das Vorzeichen der Kraft umkehrt. Diese liegen bei dem durch die lineare Theorie mit Kopplung bestimmten Wert: etwa $189\,\mu\mathrm{m}$ (vgl. Abb. 3.13). Für gleich große Ruheradien wirkt die sekundäre Bjerkneskraft immer anziehend, aber den abstoßenden Bereich der linearen Modelle für große Ruheradien findet man nicht mehr (vgl. auch Abb. 3.1 und Abb. 4.1).

Wie schon bei der ersten Serie ist das Ergebnis für sehr kleines $\tau = T/100$ erstaunlich, da die Verteilung der Vorzeichen so von der linearen Näherung abweicht, dass die Linearisierbarkeit des Problems hier nicht gerechtfertigt scheint. Die Form stimmt jedoch mit der aus Abbildung 4.1 sehr gut überein, wobei allerdings die Größendordnung der Kraft in einem Bereich bei sehr großen Ruheradien extrem zugenommen hat. Dabei gilt es zu beachten, dass sich die Blasen bei solchen Ruheradien auf solche Werte aufziehen, dass sie sich beinahe berühren. Somit darf keine sphärische Form mehr angenommen werden, was sowohl im Keller-Miksis-Modell als auch bei der Berechnung der sekundären Bjerkneskraft vorrausgesetzt wurde. Es wurden bei diesen Parametern auch Blasenpaare gefunden, die sich gegenseitig extrem aufschaukeln und somit für die starken Kräfte in diesem Modell verantwortlich sind. Die Lage der Vorzeichenwechsel stimmt dagegen recht gut mit denen aus Abbildung 3.13 überein (etwa $189\,\mu\mathrm{m}$). Sie hat sich durch den höheren Druck gegenüber der ersten Serie in diesem Abschnitt

nicht verändert (vgl. Abb. 4.1).

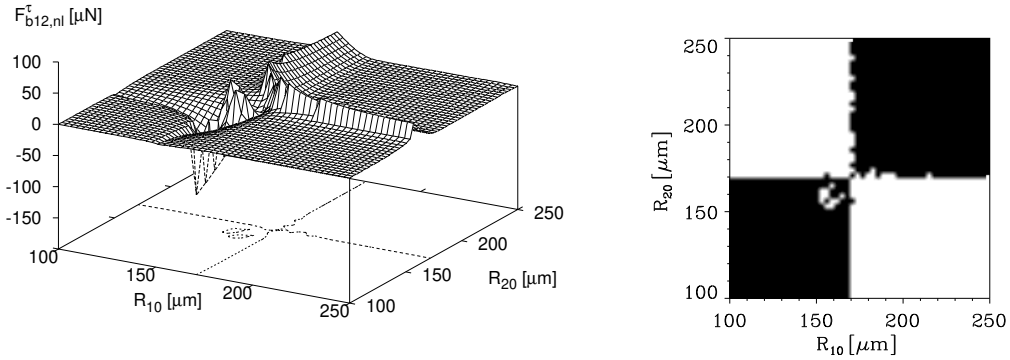

Abbildung 4.10: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/50$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 1.5\,\mathrm{mm}$, und bei einem anregenden Schalldruck von $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$. Bei diesem Schalldruck findet der Vorzeichenwechsel bei niedrigeren Ruheradien statt, als das gekoppelte linearisierte Modell vorhersagt (vgl. Abb. 3.14), während die Ränder der Flächen gegenüber Abb. 4.2 als Folge des höheren Drucks weiter „ausfransen“. Das nichtlineare Verhalten der Blasen wird auch an dem Knick im Gebirgsplot sichtbar (überhängende Resonanzkurven). S. auch Abb. 4.2.

In Abbildung 4.10 liegen die Ruheradien, bei denen sich das Vorzeichen der sekundären Bjerkneskraft umkehrt bei niedrigeren Werten, als es das lineare Modell mit Kopplung angibt. Das ist insofern bemerkenswert als sich dieser Trend fortsetzt. Für $\tau = T/10$ liegen diese Werte sogar deutlich unter denen aus Abschnitt 3.2.2: unter $150\,\mu\mathrm{m}$ gegenüber mehr als $160\,\mu\mathrm{m}$. Dies ist ein Anzeichen für das Verlassen der linearen Näherung bei einem anregenden Schalldruck von 10 kPa. Hinzu kommt, dass der Betrag der Kraft durchgehend höher ist. Wie bereits erwähnt kann der Betrag um Größenordnungen zunehmen, wenn die Blasenschwingung die lineare Domäne verlässt. Im Gebirgsplot der sekundären Bjerkneskraft in Abbildung 4.10 fällt zudem der starke Knick auf, der in Resonanzkurven (und die sekundäre Bjerkneskraft folgt diesen ja in weiten Teilen; s. Abschnitt 3.2.1) ein Zeichen für das Anwachsen einer Nichtlinearität ist. Genaugenommen hängen die Resonanzkurven hier über und es gibt zwei verschiedene stabile Lösungen (*Hysterese*; s. z. B. [21]).

Abbildung 4.11 bei $\tau = T/10$ zeigt wieder die gewohnte Geometrie der Vorzeichenverteilung, bei allerdings kleineren vorzeichenwechselnden Ruheradien. Die nichtlinearen Effekte sind hier nicht ausschlaggebend. Gleiches gilt für Abbildung 4.12 bei $\tau = T/5$ und Abbildung 4.13 bei $\tau = T/4.1$. Bemerkenswert ist weiterhin die sehr gute Übereinstimmung für $\tau = T/4.1$, also in einem Bereich, in dem sich die Vorzeichenmuster sehr schnell ändern, mit der Abbildung 3.17 aus Abschnitt 3.2.2.

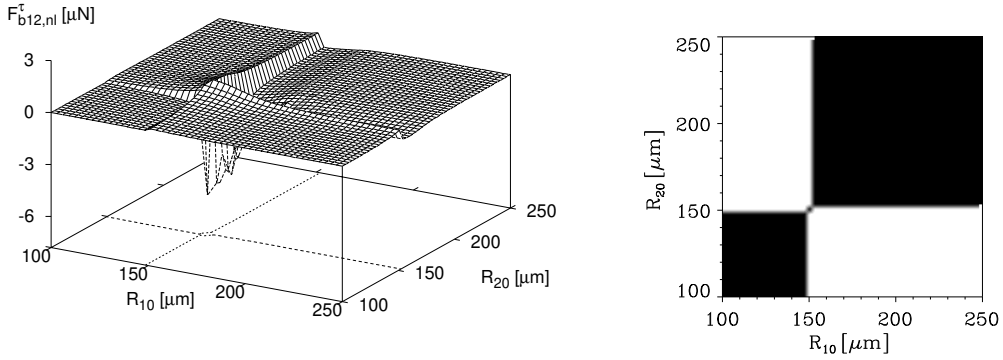

Abbildung 4.11: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/10$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 7.5\,\mathrm{mm}$, und bei einem anregenden Schalldruck von $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$. Die Vorzeichenwechsel liegen bei deutlich niedrigeren Ruheradien als in der linearen Näherung, denen bei einem anregenden Schalldruck von $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$ im nichtlinearen Modell noch gut entsprochen wurde (vgl. mit Abb. 3.2, Abb. 3.15 und Abb. 4.3)

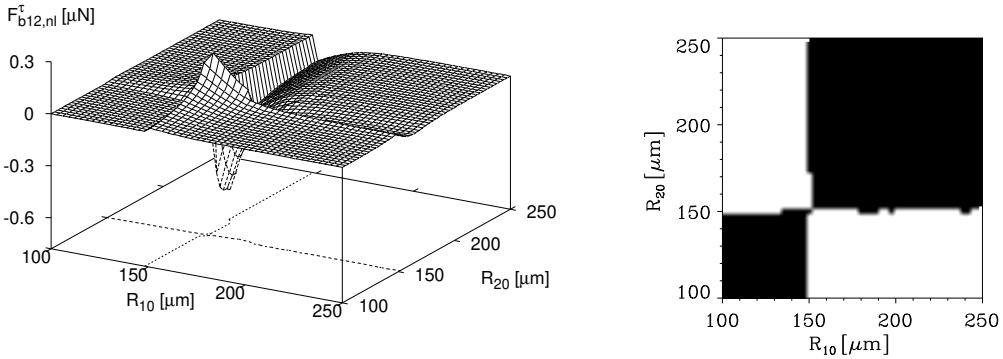

Abbildung 4.12: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/5$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 15\,\mathrm{mm}$, und $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$. Die Größenordnung der sekundären Bjerkneskraft stimmt gut mit der linearen Näherung überein, die Vorzeichenwechsel liegen jedoch wie in den Fällen $\tau = T/50$ bei niedrigeren Ruheradien. Die Geometrie der Vorzeichenverteilung bleibt weiterhin gut erhalten. (Vgl. Abb. 3.3, Abb. 3.16 und Abb. 4.4)

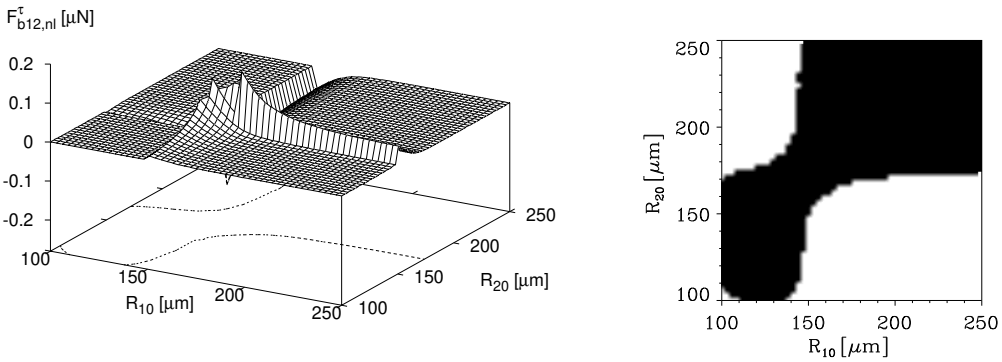

Abbildung 4.13: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/4.1$, entspricht einem Blasenabstand von $d \approx 18.29\,\mathrm{mm}$, und $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$. Diese Abbildung stimmt mit dem linearisierten gekoppelten Modell in Abb. 3.17 in bemerkenswerter Weise überein. Vgl. auch Abb. 3.4 und Abb. 4.5

Der Fall $\tau = T/4$, der in Abbildung 4.14 dargestellt ist, offenbart dann wieder eine Abweichung vom Ergebnis der linearen Näherung. Bei Ruheradien zwischen $100\,\mu\mathrm{m}$ und $130\,\mu\mathrm{m}$ biegt die Grenze der Flächen gleichen Vorzeichens ab und verlässt die Winkelhalbierende. Hier lassen sich nun auch Blasen finden, die sich bei gleichem Ruheradius gegenseitig abstoßen.

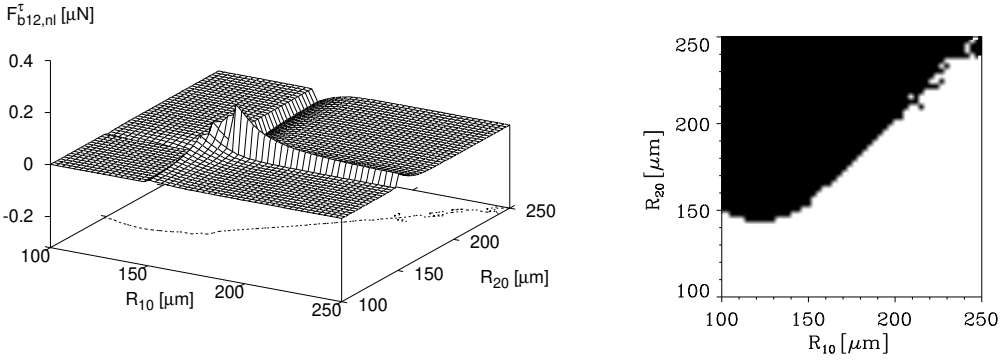

Abbildung 4.14: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/4$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 18.75\,\mathrm{mm}$, und $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$. Die Trennlinie biegt von der Winkelhalbierenden ab, so dass sich gleich große Blaasenpaare finden lassen, die sich gegenseitig abstoßen. Vgl. mit Abb. 3.16, Abb. 3.18 und Abb. 4.6

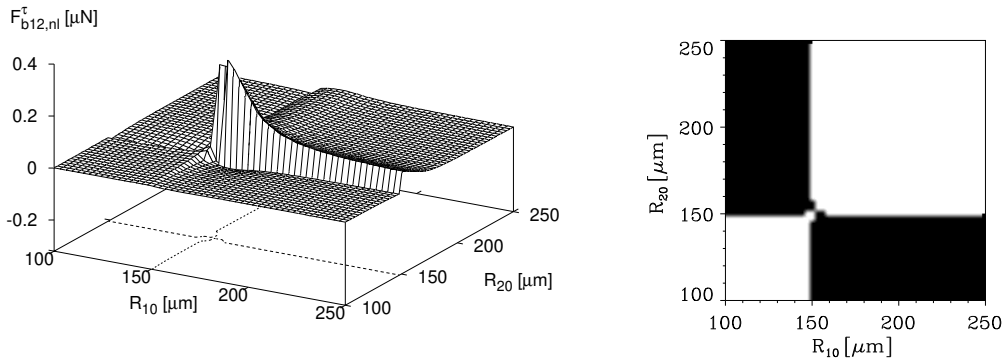

Abbildung 4.15: sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/3$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 25\,\mathrm{mm}$, und $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$. Auch hier drehen sich die Vorzeichen für $\tau > T/4$ um, wie in Abb. 3.7, Abb. 3.19 und Abb. 4.7.

Die Abbildungen 4.15 und 4.16 zeigen dann wieder das erwartete Bild mit zu kleineren Ruheradien verschobenen Vorzeichenwechseln bei umgedrehtem Vorzeichen gegenüber der Verteilung für sehr kleines Delay.

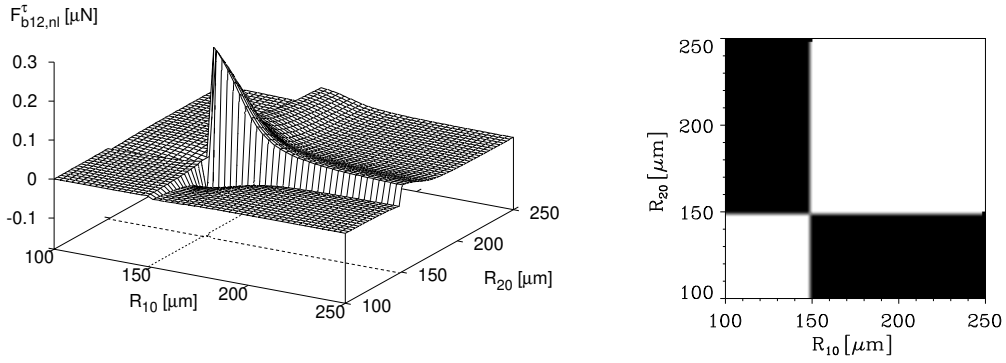

Abbildung 4.16: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/2$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 37.5\,\mathrm{mm}$, und $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$. Vgl. mit Abb. 3.8, Abb. 3.20 und Abb. 4.8.

4.2 Sekundäre Bjerkneskraft bei hohem Druck

In diesem Kapitel werden die sekundären Bjerkneskräfte für Wechseldruckwerte studiert, bei denen Strukturbildung auftauchen kann. Typischerweise liegen die Anregungsdrücke dann über 100 kPa und die Blasenradien unter 10 μm. Dennoch soll zunächst die bereits bekannte Serie von $\tau = T/100$ bis $\tau = T/2$ bei einem Druck von 100 kPa betrachtet werden, damit man einen Eindruck bekommt, welchen Einfluss die nichtlinearen Terme in der Keller-Miksis-Gleichung auf die sekundäre Bjerkneskraft besitzen. Die Untersuchungen für die tatsächlich relevanten Parameter werden im folgenden Kapitel 4.3 vorgestellt.

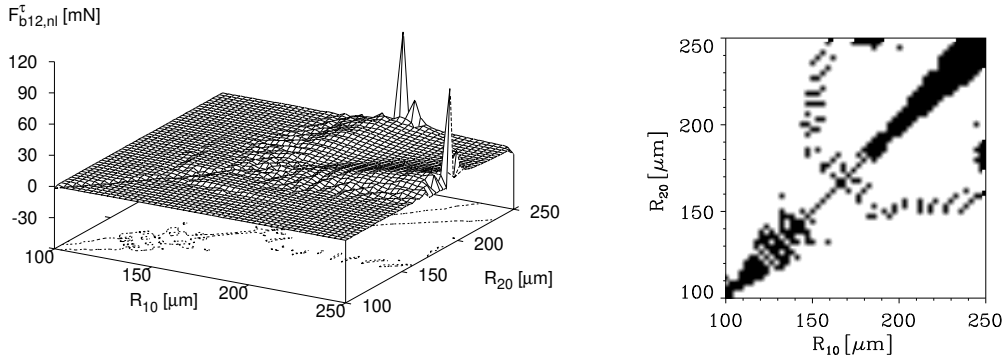

Abbildung 4.17: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/100$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 0.75$ mm, und $p_a = 100$ kPa. Ein sehr komplexes Muster, das mit den Vorhersagen der linearen Theorie (vgl. Abb. 3.1 und Abb. 3.13) nichts mehr und mit dem Verhalten für geringere Drücke (Abb. 4.1, Abb. 4.9) nur noch wenig gemeinsam hat. Gleich große Blasen ziehen sich auch weiterhin an.

Abbildung 4.17 zeigt bei $\tau = T/100$ ein völlig neues Vorzeichenmuster. Die im vorigen Abschnitt beobachtete Anziehung bei $R_{10} = R_{20}$ findet sich hier wieder, aber die komplexe Struktur der Abbildung ist so noch nicht aufgetreten. In dieser Konstellation, also bei hohem Druck, kleinem Delay und großen Blasen, lassen sich sehr viele Blasenpaare finden, in denen eine Kraft mit anderem Vorzeichen wirkt, als bei Blasenpaaren mit nur leicht veränderten Ruheradien. Abgesehen von ihrer physikalischen Bedeutung hat diese Abbildung einen wesentlich höheren ästhetischen Wert als beispielsweise Abbildung 4.18, die den Fall $\tau = T/50$ zeigt. Hier ist die Komplexität des Musters verlorengegangen, und es treten überwiegend anziehende Bjerkneskräfte auf. Lediglich falls der Ruheradius einer der beiden Blasen nicht wesentlich über 100 μm liegt, stoßen sich die Blasen gegenseitig ab.

Dass sich die Bjerkneskraftlandschaft beim Übergang zu $\tau = T/10$ noch einmal stark ändert, wobei die Kraft durchgehend anziehend wirkt, spricht zusammen mit der Konstanz dieser

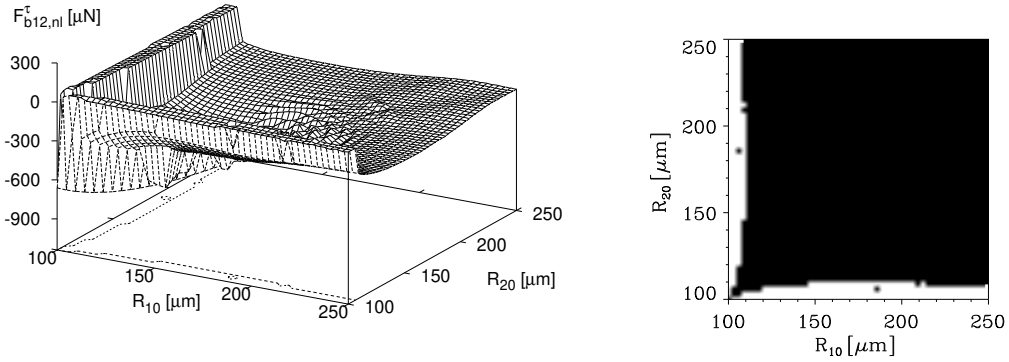

Abbildung 4.18: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/50$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 1.5\,\mathrm{mm}$, und $p_a = 100\,\mathrm{kPa}$. Überwiegend anziehende Kräfte. Die Geometrie der Bjerkneskraftlandschaft hat sich sehr stark verändert. Vgl. Abb. 3.14, Abb. 4.2 und Abb. 4.10.

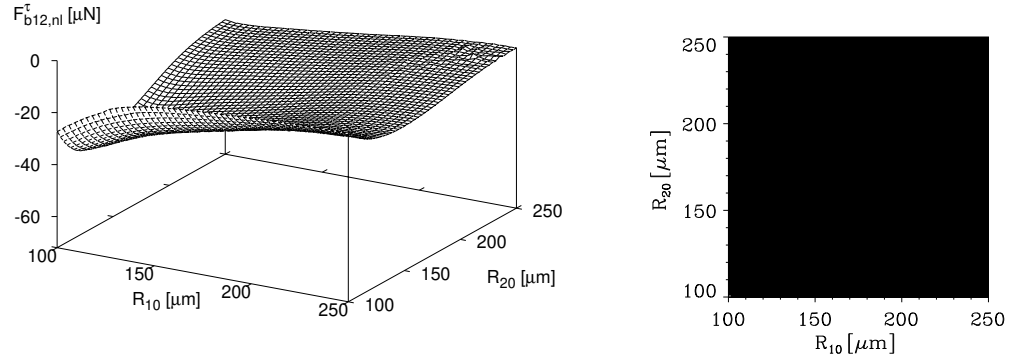

Abbildung 4.19: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/10$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 7.5\,\mathrm{mm}$, und $p_a = 100\,\mathrm{kPa}$. Ausschließlich anziehende Kräfte. Das Bjerkneskraftgebirge hat sich noch einmal stark verändert. Die Bjerkneskraft hängt also bei diesen Parametern stark von einem kleinen Delay ab. Vgl. mit Abb. 3.2, Abb. 3.15, Abb. 4.3 und Abb. 4.11.

Struktur in den weiteren Abbildungen dafür, dass die sekundäre Bjerkneskraft bei solchen hohen Drücken sehr empfindlich von der Delaykopplung abhängt, wenn die Blasen nahe beieinander schwingen. Da bei der Strukturbildung Blasenabstände in Millimeterbereich beobachtet werden, was bei der Anregungsfrequenz $\nu = 20\,\mathrm{kHz}$ einem $\tau \approx T/75$ entspricht, wird die gegenseitige Kopplung und das Delay also durchaus eine bedeutende Rolle bei der Modellierung der Strukturbildung spielen können. Dazu gilt es noch, die Stärke der resultierenden sekundären Bjerkneskraft gegen die der primären Bjerkneskraft abzuwägen. Dies ist jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit. Bei $\tau = T/5$ in Abbildung 4.20 gibt es wieder einen kleinen

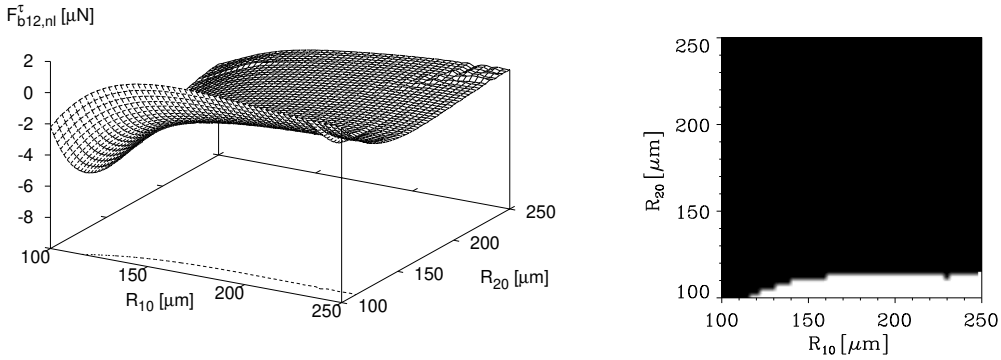

Abbildung 4.20: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/5$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 15\,\mathrm{mm}$, und $p_a = 100\,\mathrm{kPa}$. Kleiner abstoßender Bereich bei kleinen Ruheradien der zweiten Blase, soweit die hier noch erfasst werden. Vgl. auch mit den Abbildungen 3.3, 3.16, 4.4 und 4.12.

abstoßenden Bereich bei kleinem R_{20}.

Die Abbildungen 4.21 und 4.22 zeigen wieder etwas mehr Veränderungen im Vorzeichenmuster. Bei $\tau = T/4.1$ ist der abstoßende Bereich, der bei $\tau = T/5$ noch bei kleinen R_{20} lag, stark gewachsen. Außerdem sind zwei Kämme im Gebirgsplot aufgetaucht, die sich auch in den folgenden Abbildungen dieser Serie wiederfinden und ausbreiten. Wenn das Delay auf $\tau = T/4$ gewachsen ist, findet man sogar die Winkelhalbierende als Vorzeichenwechsel wieder. Es gibt lediglich bei sehr großen Ruheradien einige Unregelmäßigkeiten und eine leichte Verschiebung zu größeren R_{20}.

Die Abbildungen für $\tau = T/3$ und $\tau = T/2$ (4.23 und 4.24) zeigen, dass auch der Vorzeichenwechsel jenseits von $\tau = T/4$ bei hohen Drücken noch stattfindet: der gesamte dargestellte Bereich ist abstoßend.

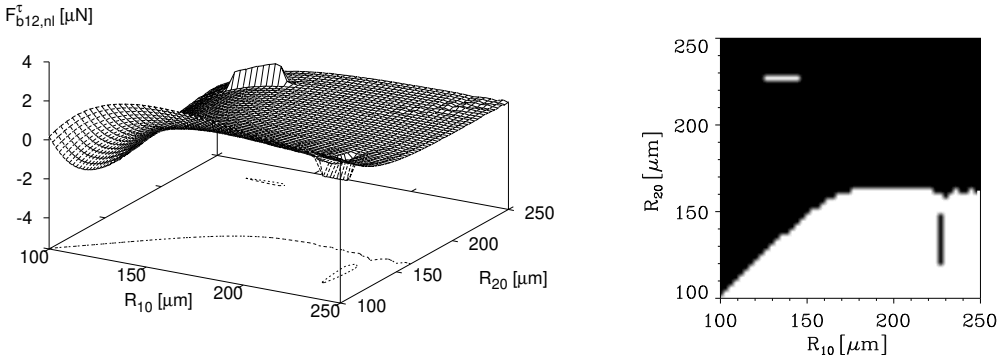

Abbildung 4.21: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/4.1$, entspricht einem Blasenabstand von $d \approx 18.29\,\mathrm{mm}$, und $p_a = 100\,\mathrm{kPa}$. Der abstoßende Bereich ist gewachsen. Vgl. auch mit den Abbildungen 3.4, 3.17, 4.5 und 4.13.

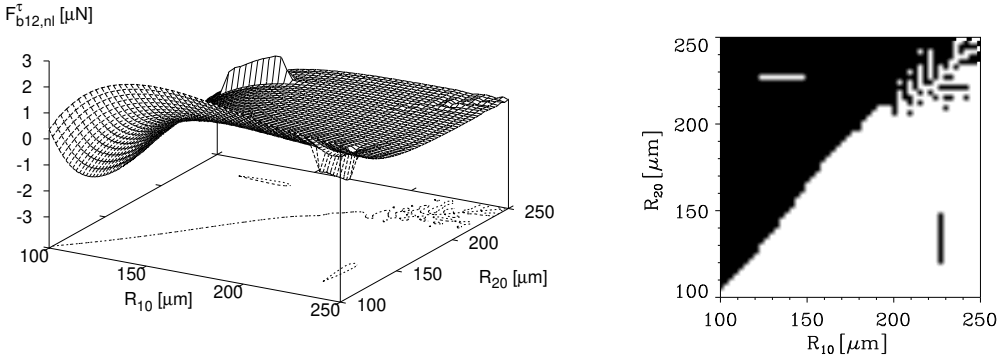

Abbildung 4.22: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/4$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 18.75\,\mathrm{mm}$, und $p_a = 100\,\mathrm{kPa}$. Die Ebene ist bezüglich ihrer Vorzeichen (fast) wieder an der Winkelhalbierenden gespiegelt, wie es in allen vergleichbaren vorherigen Abbildungen (3.5, 3.18, 4.6 und 4.14) der Fall war.

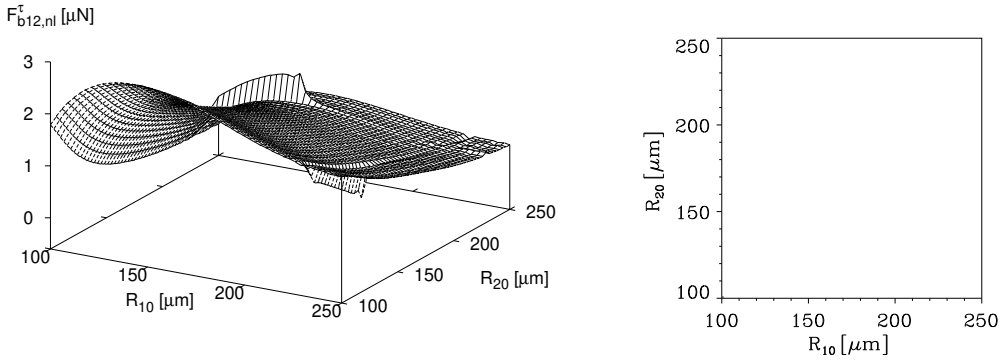

Abbildung 4.23: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/3$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 25\,\mathrm{mm}$, und $p_a = 100\,\mathrm{kPa}$. Das Vorzeichen wechselt bei $\tau > T/4$. Der gesamte Bereich ist bei $\tau = T/3$ bereits abstoßend. Vgl. dazu die Abbildungen 3.7, 3.19, 4.7 und 4.15.

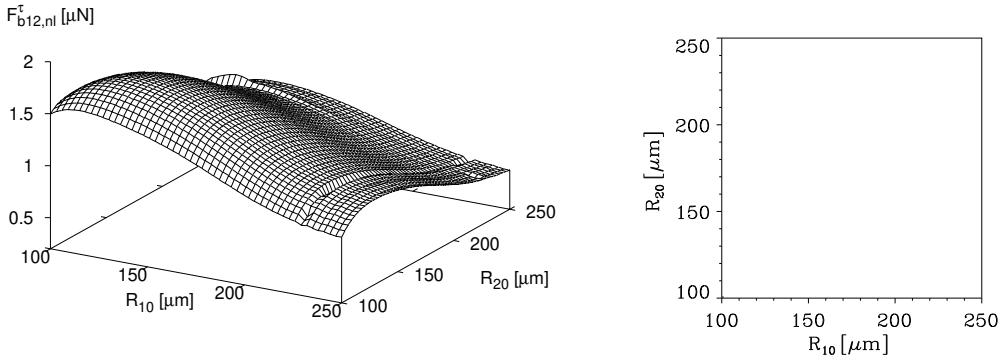

Abbildung 4.24: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/2$, entspricht einem Blasenabstand von $d = 37.5\,\mathrm{mm}$, und $p_a = 100\,\mathrm{kPa}$. Wie bei $\tau = T/3$ ist auch hier der gesamte dargestellte Bereich abstoßend. Vgl. dazu die Abbildungen 3.8, 3.20, 4.8 und 4.16.

4.3 Sekundäre Bjerkneskraft bei für die Strukturbildung relevanten Parametern

Nachdem nun die Vergleiche des vollen nichtlinearen Modells mit der linearen Näherung gezogen wurden, wird die Bjerkneskraft auch für solche Parameter berechnet, wie sie in der Strukturbildung tatsächlich auftreten. Wie in Kapitel 2 beschrieben wurde, liegt die Größenordnung der Ruheradien der an der Strukturbildung beteiligten Blasen im Bereich weniger Mikrometer. Daher wird hier nun ein Ausschnitt bei $1\,\mu\text{m} \leq R_{j0} \leq 20\,\mu\text{m}$ aus der R_{10}-R_{20}-Ebene gezeigt. Die Auswahl der berechneten Anregungsdrücke orientiert sich an den in [25] verwendeten: 112 kPa, 116 kPa, 120 kPa, 124 kPa und 132 kPa. Allesamt sind das Drücke, bei denen Strukturbildung beobachtet werden kann. Außerdem wurden hier nicht mehr die ganzen τ-Serien aufgenommen, sondern nur noch für $\tau = T/100$ als sehr kleinem Delay, $\tau = T/10$ für ein weiteres und $\tau = T/4$, um den „unsymmetrischsten" Punkt, wie er in Abschnitt 3.1.2 beschrieben wurde, zu betrachten. Die Auflösung der Abbildungen ist noch etwas geringer als dies in den vorherigen Abschnitten der Fall war. Daher treten die Interpolationseffekte deutlicher in Erscheinung.

In [25] wurde von METTIN et al. für instantan gekoppelte Blasen im Abstand von 1 mm bei obigen Anregungsdrücken und ansonsten identischen Parametern (s. Tabelle 2.1) der Bjerkneskoeffizient, der dort als

$$f_B = \frac{\rho}{4\pi}\langle \dot{V}_1 \dot{V}_2 \rangle_t \tag{4.1}$$

definiert wurde, berechnet. Der $1/d^2$-Abfall der eigentlichen sekundären Bjerkneskraft wurde nicht beachtet, während hier die tatsächlichen Kräfte dargestellt werden. Die Vorzeichenmuster in dieser Arbeit sind aber ohne weiteres mit den Darstellungen aus [25] vergleichbar. Es zeigte sich dort, dass bei Drücken knapp über 100 kPa ein zur Winkelhalbierenden symmetrisches aber ansonsten sehr fein strukturiertes, fächerförmiges Muster sichtbar wird, in dem sich anziehende und abstoßende Kräfte bereits bei kleiner Änderung eines Ruheradius abwechseln. Mit wachsendem Anregungsdruck wachsen abstoßende Bereiche, die immer schärfer begrenzt sind. Für großen Anregungsdruck (132 kPa) zeigt das Bild einen sehr großen anziehenden Bereich, wenn beide $R_{j0} > 2\,\mu\text{m}$ sind. Falls ein Ruheradius größer als $2\,\mu\text{m}$ ist und der andere kleiner, ergibt sich eine abstoßende Kraft, und falls beide kleiner als $2\,\mu\text{m}$ sind, eine anziehende Kraft, deren Betrag nicht so groß ist wie der der Kraft bei $R_{10}, R_{20} > 2\,\mu\text{m}$. Es wurde beobachtet, dass die Grenze der abstoßenden Bereiche, die im beschriebenen Fall von $p_a = 132\,\text{kPa}$ bei $R_{j0} \approx 2\,\mu\text{m}$ liegt, für zunehmende Drücke von größeren Ruheradien (etwa $3\,\mu\text{m}$ bei $p_a = 120\,\mu\text{m}$) zu kleineren Ruheradien geht.
Diese Ergebnisse lassen sich mit den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationsrechnungen, denen das volle nichtlineare, delay-gekoppelte System zugrunde liegt, zum Teil wiederfinden. Es zeigen sich aber auch ganz erhebliche Unterschiede zu den in [25] erzielten Ergebnissen, die im Folgenden vorgestellt werden.

Die Abbildungen 4.25 bis 4.27 zeigen die Bjerkneskraft sowie ihr Vorzeichen in gewohnter

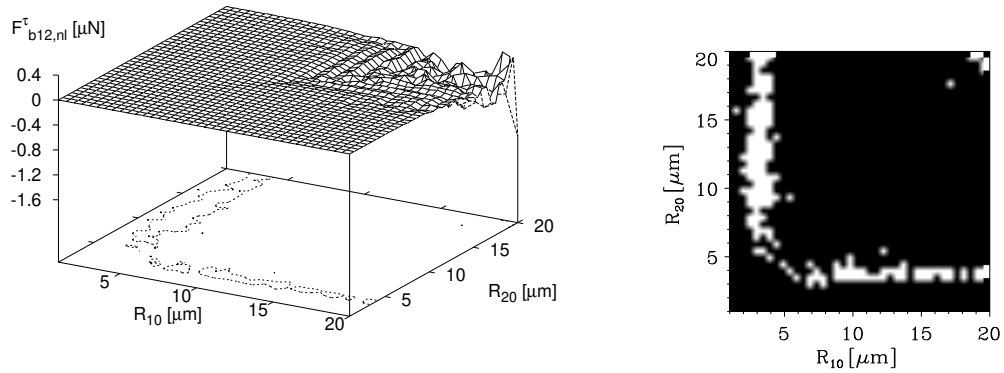

Abbildung 4.25: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/100$ ($d = 0.75\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 112\,\mathrm{kPa}$. Bis auf kleine Bereiche, wenn eine der Blasen einen kleinen Ruheradius hat, ist die Bjerkneskraft anziehend. Diese Geometrie der Vorzeichenverteilung findet sich bei METTIN et al. in [25] erst bei intensiveren Anregungen. Man beachte auch die Einheit der sekundären Bjerkneskraft: bei $\tau = T/100$ jedesmal μN, sonst pN.

Manier bei einem anregenden Schalldruck von 112 kPa. Entgegen den Ergebnissen in [25] ist das sich ergebene Muster in 4.25 bei $\tau = T/100$ jedoch nicht fächerförmig. Es ähnelt eher dem dort für hohe Drücke gefundenem. Weite Teile des dargestellten Bereichs sind anziehend, bis auf Gebiete, in denen einer der beiden Ruheradien etwa zwischen $2\,\mu$m und $3\,\mu$m liegt. Eine geringe Asymmetrie ist zu erkennen.

Die nächsten beiden Bilder 4.26 und 4.27 dieser Serie zeigen dann eine völlige Auflösung dieser Geometrie. Zunächst kann man bei $\tau = T/10$ noch eine gebrochene Symmetrie erkennen, ähnlich wie für $\tau = T/4$ zu erwarten. Bei $\tau = T/4$ jedoch ergibt sich in weiten Teilen eine abstoßende Kraft, mit einigen, keine erkennbare Symmetrie ergebenden, anziehenden „Inseln“.

Die Sequenz für $p_a = 112\,\mathrm{kPa}$ findet sich qualitativ auch in den nächsten Sequenzen für höhere Anregungsdrücke wieder. So ist in Abbildung 4.28 für $\tau = T/100$ die gleiche Symmetrie wie in Abbildung 4.25 zu erkennen. Es zeigt sich jedoch, dass der obere Grenzruheradius der abstoßenden Bereiche wie auch bei METTIN et al. zu niedrigeren Werten geht. Er liegt hier bei etwa 4μm. In Abbildung 4.29 erkennt man ein gegenüber Abbildung 4.26 nur geringfügig verändertes Muster, und in Abbildung 4.30 gibt es weniger anziehende Bereiche als bei einem anregenden Schalldruck von $p_a = 112\,\mathrm{kPa}$.

Bei einer weiteren Erhöhung der Anregung auf $p_a = 120\,\mathrm{kPa}$ sinken die Ruheradien, die bei einem Delay von $\tau = T/100$ die abstoßenden Bereiche nach oben begrenzen weiter auf nun etwa 3μm, und die Felder sind schärfer begrenzt. Der höhere Druck bewirkt gewissermaßen

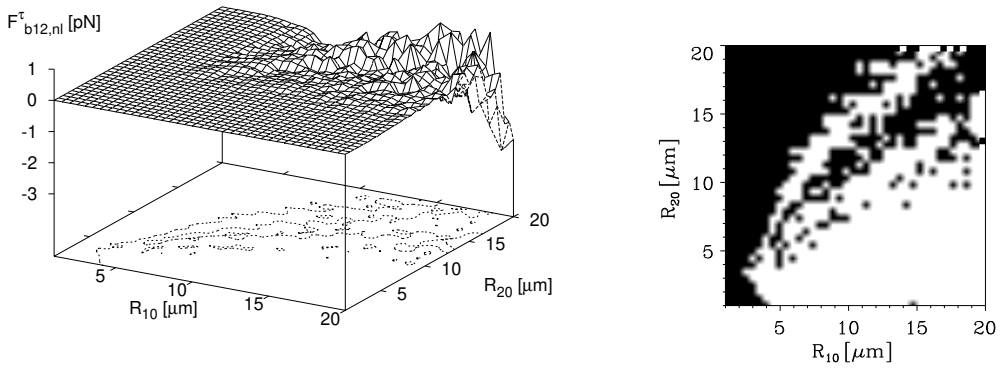

Abbildung 4.26: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/10$ ($d = 7.5\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 112\,\mathrm{kPa}$. Eine mehr oder weniger zur Winkelhalbierenden symmetrische Verteilung der Vorzeichen bei stärkerer Kraft als bei $\tau = T/100$.

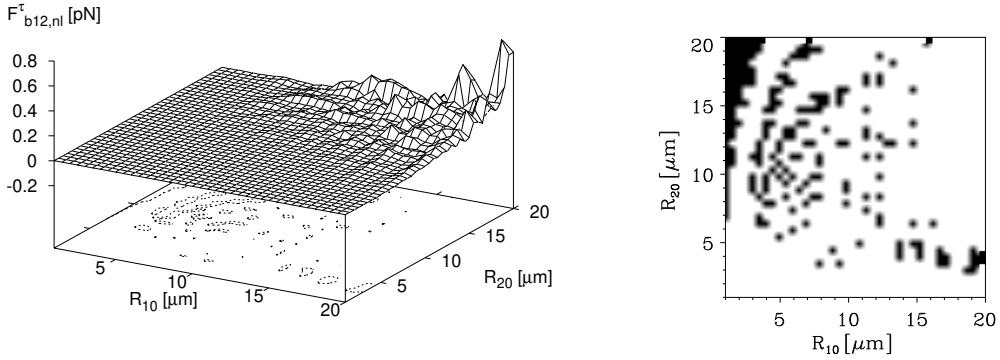

Abbildung 4.27: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/4$ ($d = 18.75\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 112\,\mathrm{kPa}$. Ohne erkennbare Symmetrie verteilte anziehende Inseln in einer ansonsten abstoßenden R_{10}-R_{20}-Ebene.

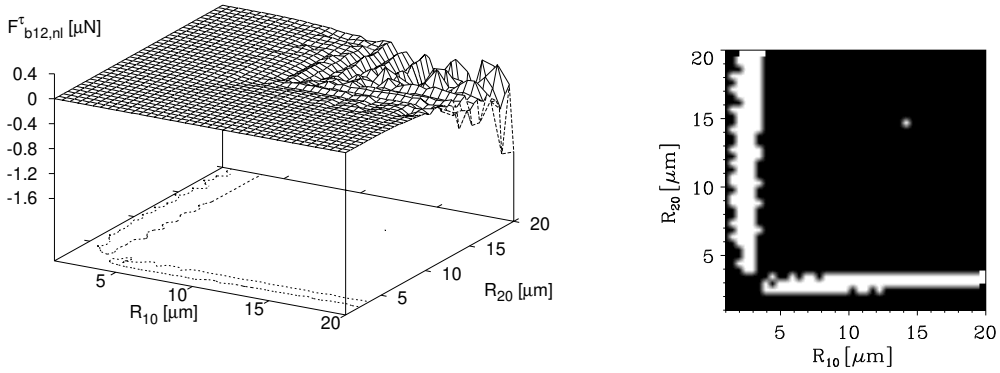

Abbildung 4.28: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/100$ ($d = 0.75\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 116\,\mathrm{kPa}$. Die obere Grenze der abstoßenden Bereiche ist mit höherem Druck zu kleineren Ruheradien gewandert. Das ließ sich auch in [25] beobachten.

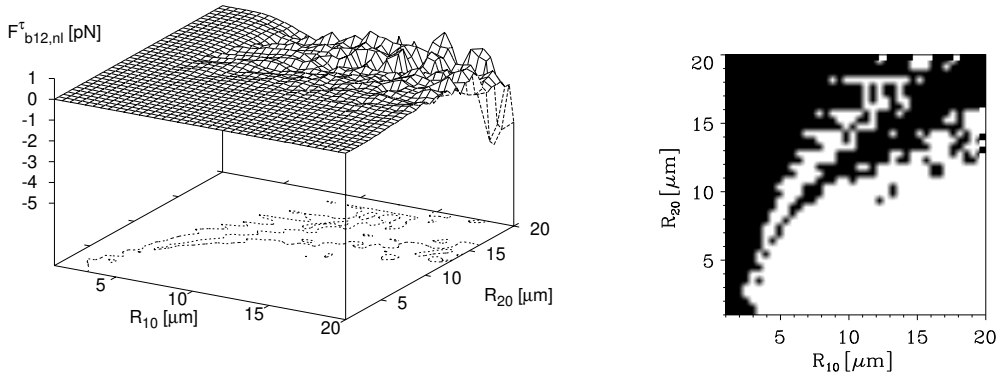

Abbildung 4.29: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/10$ ($d = 7.5\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 116\,\mathrm{kPa}$. Ein ähnliches Muster wie in Abbildung 4.26.

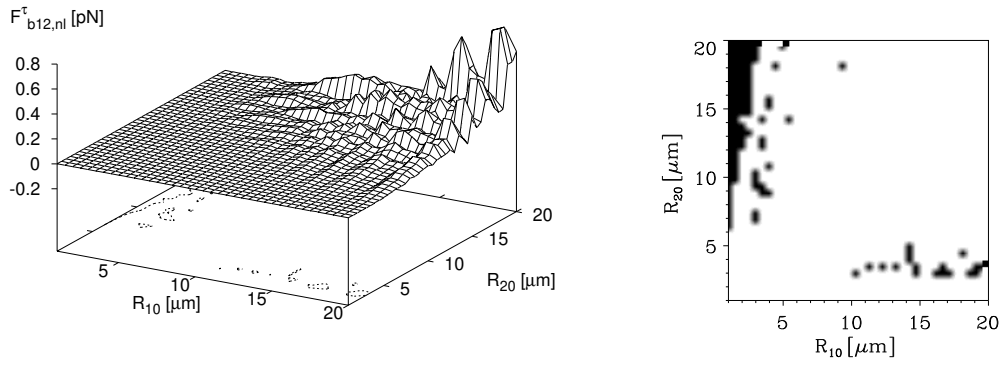

Abbildung 4.30: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/4$ ($d = 18.75\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 116\,\mathrm{kPa}$. Wieder große abstoßende Bereiche, mit weniger anziehenden Inseln.

eine Bereinigung der Vorzeichenstrukturen, wie auch in Abbildung 4.32 durch das weniger zerfurchte Muster und in Abbildung 4.33 mit weniger verteilten anziehenden Bereichen deutlich wird.

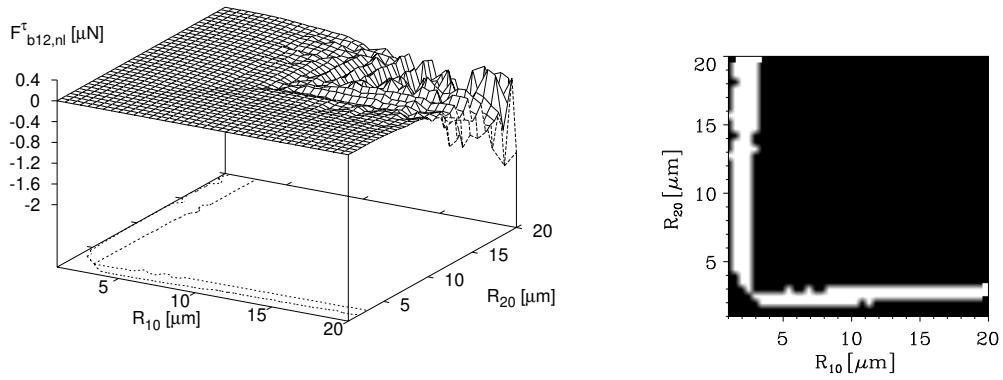

Abbildung 4.31: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/100$ ($d = 0.75\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 120\,\mathrm{kPa}$. Die obere Grenze der abstoßenden Bereiche ist auf etwa $3\mu\mathrm{m}$ gesunken und ist schärfer begrenzt.

Die Tendenzen zu „aufgeräumteren“ Strukturen und kleineren oberen Grenzen im Fall $\tau = T/100$ setzen sich mit höheren Drücken weiter fort. Bei $p_a = 132\,\mathrm{kPa}$ schließlich ist für $\tau = T/100$ nur noch ein sehr schmaler Streifen für Ruheradien kleiner als $1\,\mu\mathrm{m}$ (teilweise $2\,\mu\mathrm{m}$) anziehend, und für $\tau = T/4$ ebenfalls nur noch ein sehr kleiner Streifen bei sehr kleinem

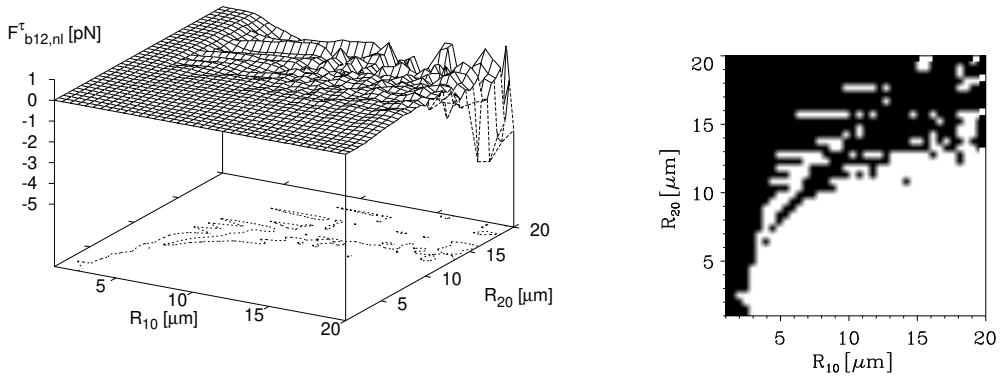

Abbildung 4.32: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/10$ ($d = 7.5\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 120\,\mathrm{kPa}$. Das Muster wirkt weniger zerfurcht. Der höhere Druck bewirkt eine Bereinigung der Vorzeichenstrukturen.

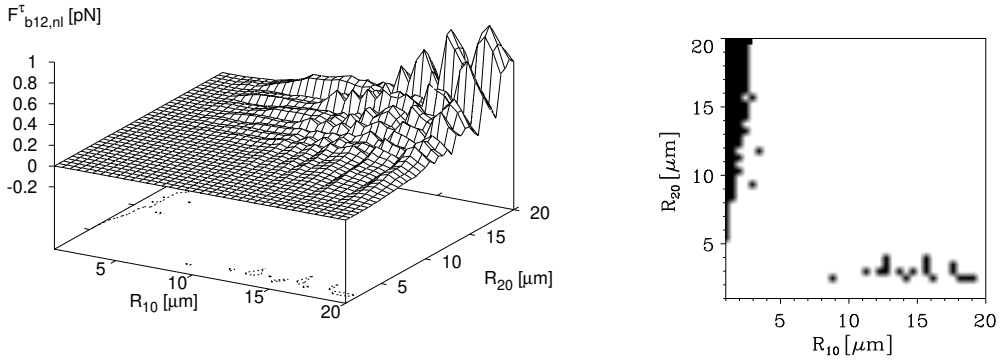

Abbildung 4.33: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/4$ ($d = 18.75\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 120\,\mathrm{kPa}$. Keine großartige Veränderung gegenüber dem Bild bei $p_a = 116\,\mathrm{kPa}$, abgesehen davon, dass die anziehenden Bereiche weniger verstreut sind.

Ruheradius der ersten Blase anziehend. Bei $\tau = T/10$ wird die dargestellte R_{10}-R_{20}-Ebene annähernd horizontal in der Mitte geteilt.

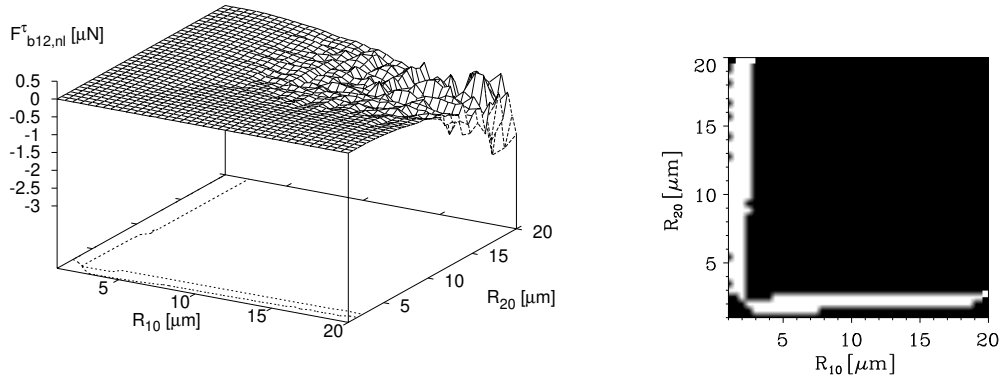

Abbildung 4.34: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/100$ ($d = 0.75\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 124\,\mathrm{kPa}$.

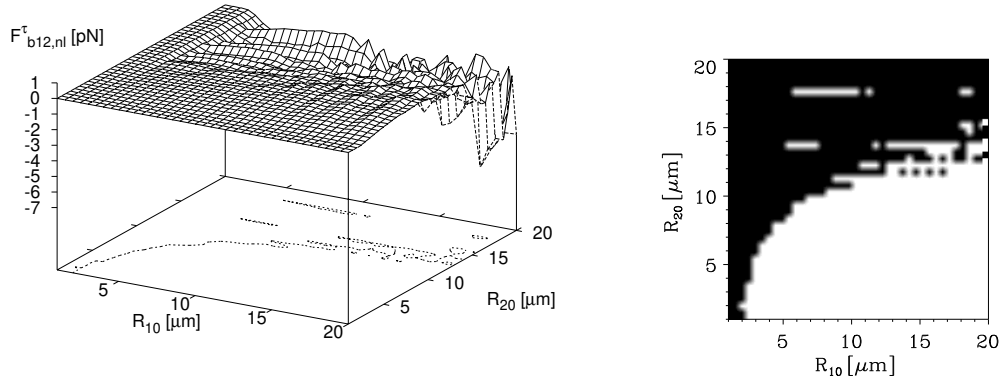

Abbildung 4.35: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/10$ ($d = 7.5\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 124\,\mathrm{kPa}$.

Es lassen sich also wie in [25] beobachten, dass es bei hohen Drücken abstoßende Bereiche in der R_{10}-R_{20}-Ebene gibt, wenn eine der beiden Blasen klein ist, und dass die obere Grenze dieser Bereiche für zunehmenden Anregungsdruck gegen kleinere Ruheradien geht. Im Unterschied zu den Beobachtungen instantan gekoppelten Fall treten diese Bereiche jedoch bei kleinem Delay bereits bei weitaus geringeren Drücken auf. Eine weitere Entfernung der Blasen voneinander bewirkt eine massive Änderung der Vorzeichenverteilung. Da die Abweichung vom instantan gekoppelten Blasenmodell bei Delaywerten auftritt, die in einem Bereich

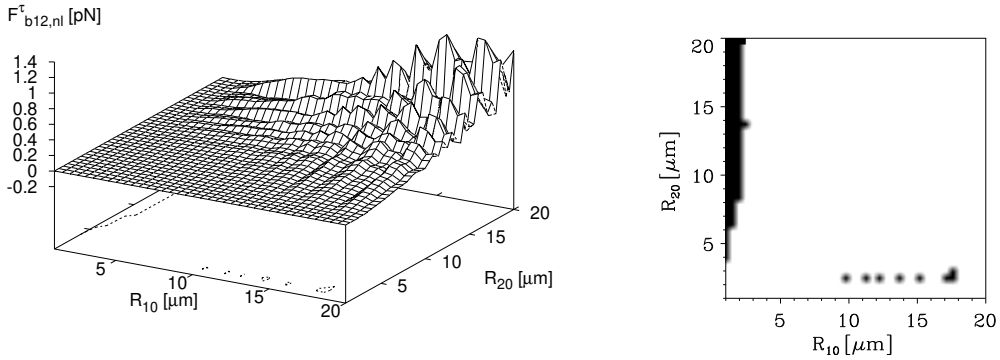

Abbildung 4.36: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/4$ ($d = 18.75\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 124\,\mathrm{kPa}$.

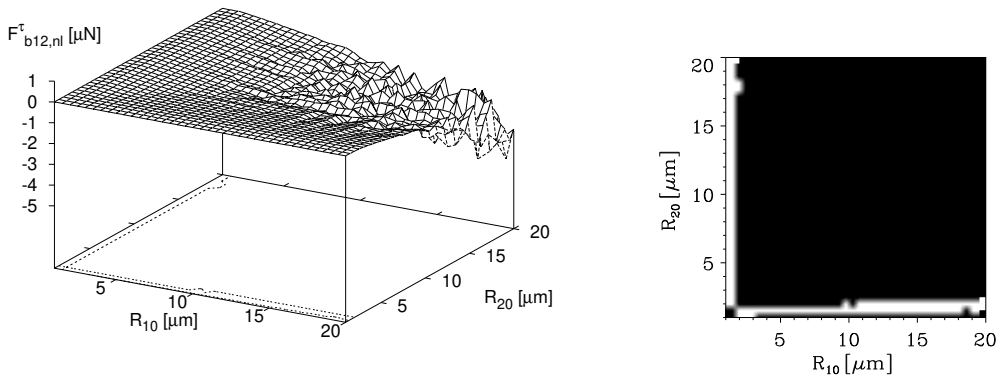

Abbildung 4.37: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/100$ ($d = 0.75\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 132\,\mathrm{kPa}$.

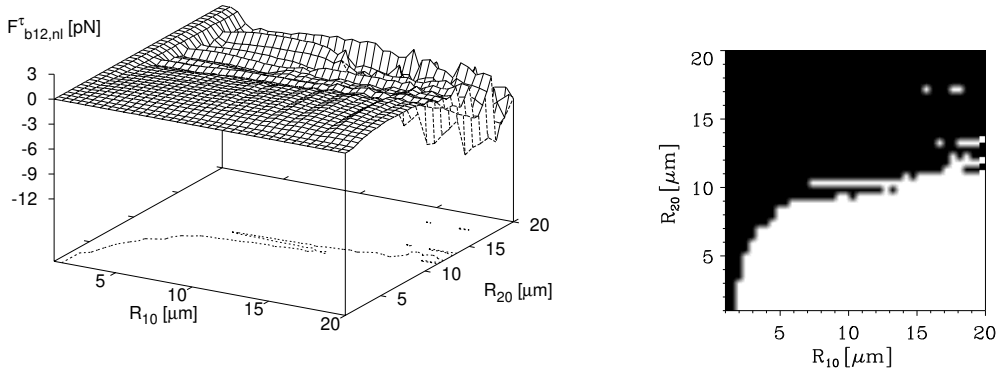

Abbildung 4.38: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/10$ ($d = 7.5\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 132\,\mathrm{kPa}$.

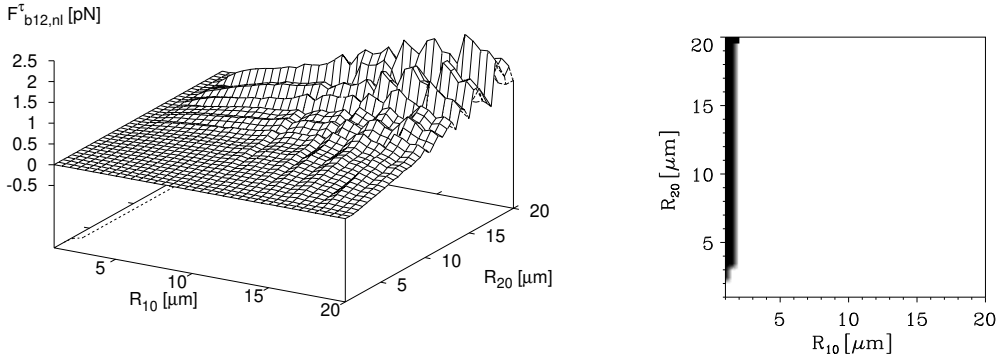

Abbildung 4.39: Sekundäre Bjerkneskraft aus der nichtlinearen Simulation und ihr Vorzeichen bei $\tau = T/4$ ($d = 18.75\,\mathrm{mm}$) und für hohen Anregungsdruck: $p_a = 132\,\mathrm{kPa}$.

liegen, wie er in der Strukturbildung beobachtet wird, darf man den Einfluss des Delays auf die sekundären Bjerkneskraft nicht vernachlässigen. Allen Ergebnissen ist gemeinsam, dass sie die Invarianz der Vorzeichenverteilung bzgl. der Indexvertauschung brechen. Das schließt die Möglichkeit ein, dass die Delay-Kopplung für das Auftreten der Streamer, auf denen sich die Blasen in das Zentrum der Struktur bewegen, mitverantwortlich ist.

Kapitel 5
Ausgewählte Trajektorien von Kavitationsblasen

Nachdem in den vorherigen Kapiteln der Schwerpunkt auf der sekundären Bjerkneskraft lag, werden nun einige Einzelheiten der Kavitationsblasendynamik betrachtet. Diese sollen den Hintergrund der sekundären Bjerkneskraft, die eigentliche Blasenschwingung, näher beleuchten und so Anhaltspunkte zur Erklärung des einen oder anderen Ergebnisses liefern. Es wurden noch mehr Effekte beobachtet, als letztlich hier vorgestellt werden. So fanden sich „super-resonante“ Blasenpaare, bei denen sich die Blasen gegenseitig aufschaukeln und die die großen Gebirge z. B. in Abbildung 4.9 erklären können. Diese werden hier jedoch nicht mehr besprochen, sondern werden in zukünftigen Arbeiten betrachtet werden. Für die drei verwendeten Modelle, deren Ergebnisse im Laufe dieser Arbeit vorgestellt wurden, werden einige Trajektorien von $R_j(t)$ gezeigt.
Das lineare Modell setzt in beiden Fällen eine kleine, harmonische Schwingung der j-ten Blase um ihren Ruheradius vorraus:

$$R_j(t) = R_{j0} + \hat{R}_j \cos(\omega t + \varphi_j). \tag{5.1}$$

Im ungekoppelten Fall, der in Abschnitt 3.1 genauer beschrieben wurde, ergeben sich $\hat{R}_j$ und φ_j zu

$$\begin{aligned} \hat{R}_j &= \frac{p_a}{\rho R_{j0}} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_{j0}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\alpha_j \omega\right)^2}} \\ \varphi_j &= \arg\left(\frac{\alpha_j \omega}{\left(\omega^2 - \omega_{j0}^2\right)}\right), \end{aligned} \tag{5.2}$$

während man diese Größen im delay-gekoppelt schwingenden Fall vermöge

$$\begin{aligned} \hat{R}_j &= \left|x_j\right| \\ \varphi_j &= \arg\left(\frac{\mathrm{Im}\, x_j}{\mathrm{Re}\, x_j}\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

mit dem in Abschnitt 3.2 beschriebenen x_j berechnet.
Die Schwingung des vollen nichtlinearen Modells ergibt sich aus der numerischen Simulation.

Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils bei drei verschiedenen Drücken (von links nach rechts: $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$, $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$ und $p_a = 100\,\mathrm{kPa}$, wie sie auch in Kapitel 4 verwendet wurden) die $R_j(t)$-Trajektorien einer Blase, wie sie sich nach den drei Modellen berechnen. Ganz oben sieht man das lineare, ungekoppelte Modell, darunter das lineare, gekoppelte und unten schließlich das nichtlineare Modell.

Eine Blase eines Blasenpaares mit Radien weit entfernt von ihrer Resonanz und nicht sehr unterschiedlich ($100\,\mu\mathrm{m}$ und $123\,\mu\mathrm{m}$) wird in den Abbildungen 5.1 (für ein Delay $\tau = T/100$) und 5.2 ($\tau = T/10$) gezeigt. Dort ergibt sich unabhängig vom Delay eine gute Übereinstimmung beider linearer Modelle mit dem nichtlinearen Modell, solange der Schalldruck der Anregung nicht zu groß wird.

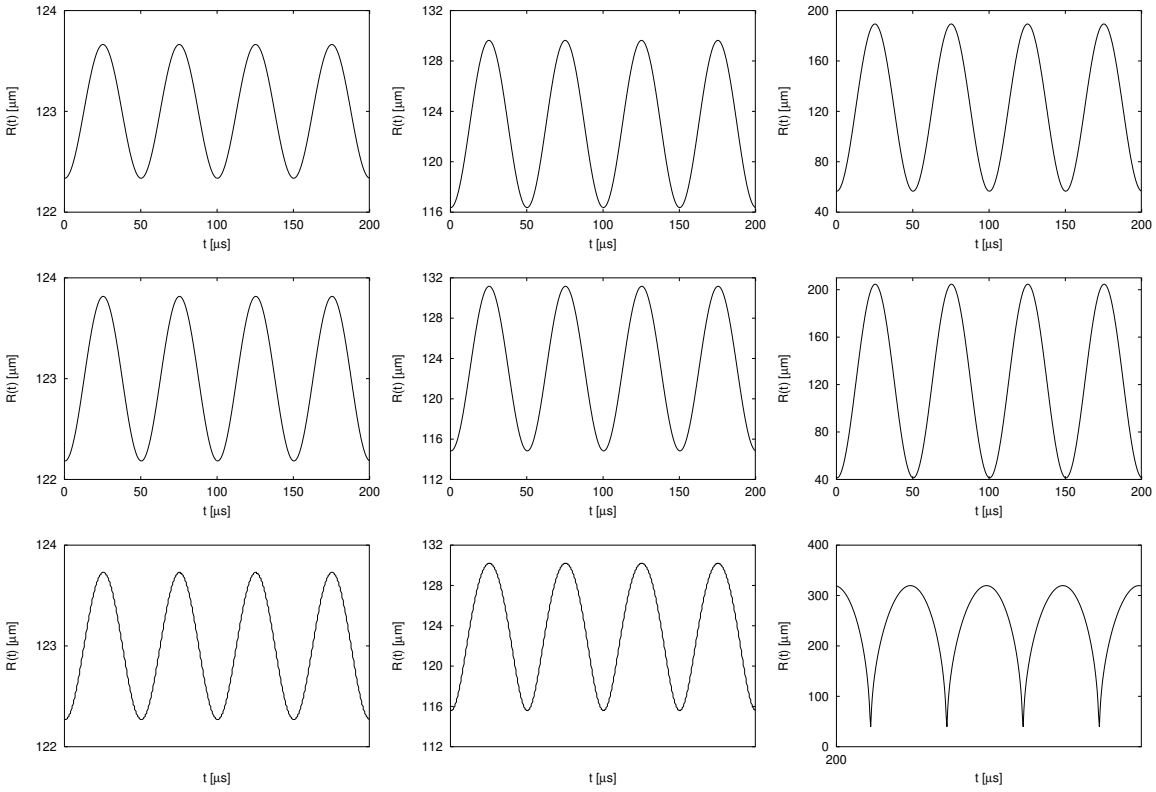

Abbildung 5.1: $R_j(t)$-Trajektorien bei $\tau = T/100$, $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$ (links), $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$ (Mitte) und $p_a = 100\,\mathrm{kPa}$ (rechts) für einen Ruheradius weit entfernt von der linearen Resonanz bei $R_{10} = 123\,\mu\mathrm{m}$. Die in $d = 0.75\,\mathrm{mm}$ schwingende Nachbarblase hat einen Ruheradius $R_{20} = 100\,\mathrm{mm}$. Gute Übereinstimmung beider linearer Modelle mit dem nichtlinearen Modell bei geringen Drücken.

Abbildung 5.3 zeigt nun bei einem kleinen Delay von $\tau = T/100$ die nach den drei im Laufe der Arbeit betrachteten Modellen berechneten $R_j(t)$-Kurve einer Blase, deren Ruheradius mit $R_{10} = 160\,\mu\mathrm{m}$ leicht neben der (linearen) Resonanz liegt. Die angekoppelte Blase, die mit

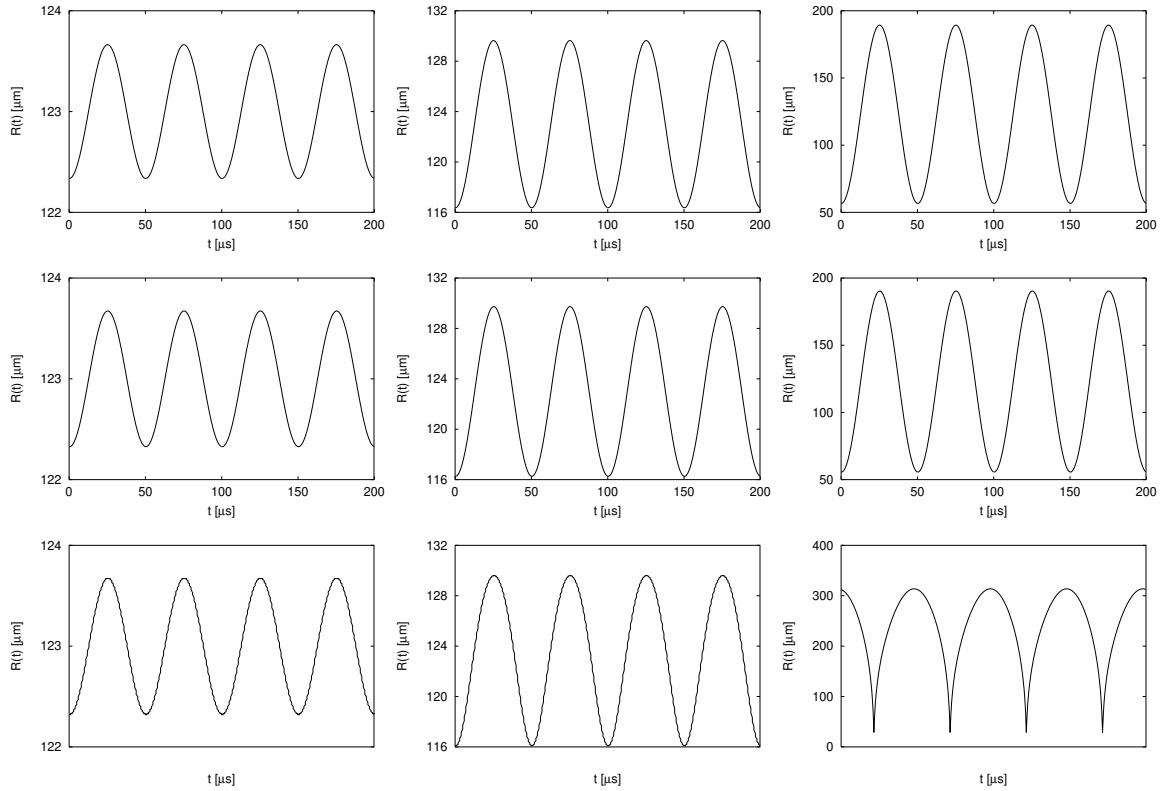

Abbildung 5.2: Trajektorien bei $\tau = T/10$, $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$ (links), $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$ (Mitte) und $p_a = 100\,\mathrm{kPa}$ (rechts) für einen Ruheradius weit entfernt von der linearen Resonanz ($R_{10} = 123\,\mu\mathrm{m}$). Nachbarblase: $R_{20} = 100\,\mathrm{mm}$, in $d = 0.75\,\mathrm{mm}$ Entfernung. Auch bei größerem Delay eine gute Übereinstimmung beider linearer Modelle mit dem nichtlinearen Modell bei geringen Drücken.

$R_{20} = 163\,\mu$m, also recht genau am linearen Resonanzradius, angenommen wird, wird weiter unten gezeigt, in den Abbildungen 5.5 und Abb. 5.6. Der Abstand ergibt sich aus dem jeweiligen Delay. Es zeigt sich, dass das lineare Modell bereits bei einem sehr geringen Druck nicht

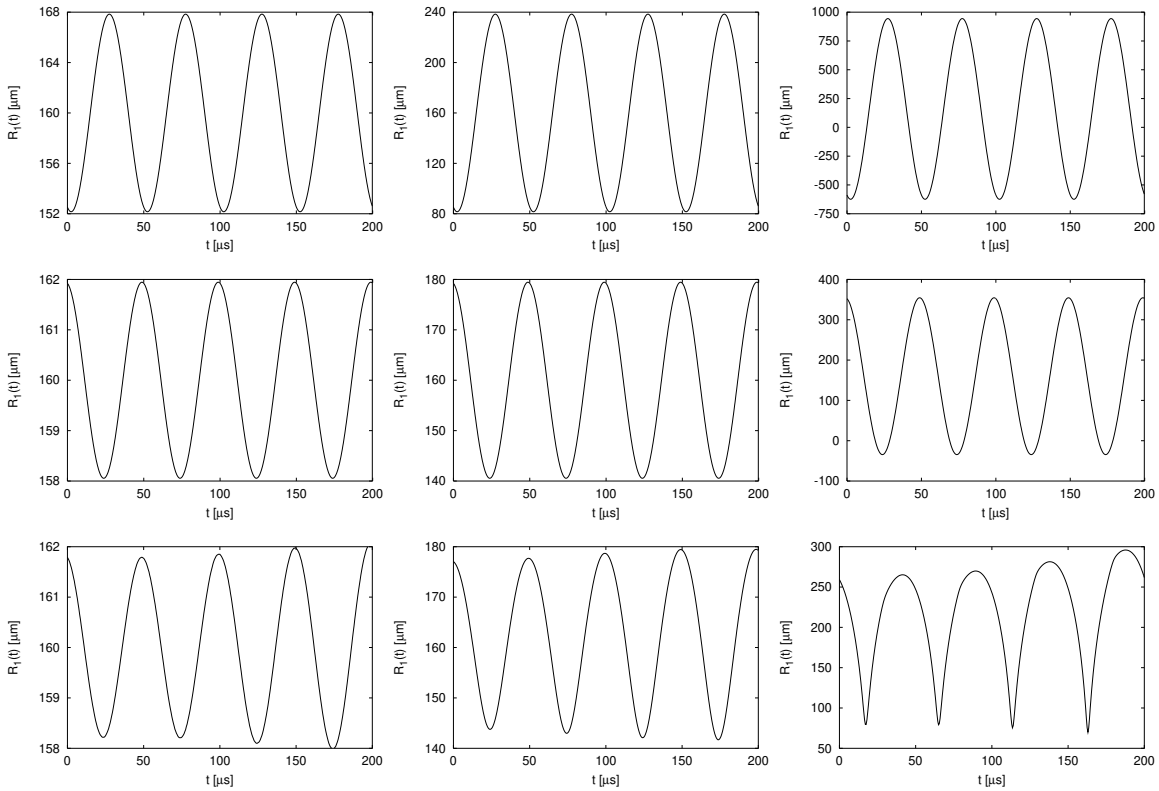

Abbildung 5.3: Trajektorien bei $\tau = T/100$, $p_a = 1\,$kPa (links), $p_a = 10\,$kPa (Mitte) und $p_a = 100\,$kPa (rechts). Der Ruheradius dieser Blase liegt mit $160\,\mu$m leicht neben der (linearen) Resonanz. In einer Entfernung von $d = 0.75\,$mm liegt die Nachbarblase mit einem Ruheradius $R_{20} = 163\,\mu$m. Das ungekoppelte, lineare Modell liefert schon bei niedrigem Druck keine sehr gute Übereinstimmung, während das delay-gekoppelte, lineare Modell noch bei $p_a = 10\,$kPa sehr gut mit dem nichtlinearen Modell einhergeht. Bei noch höherem Druck ergeben sich nach den linearen Modellen unphysikalische negative Blasenradien. Bei den Trajektorien des nichtlinearen Modells ist zu erkennen, dass der Zustand nicht vollständig eingeschwungen ist.

sehr exakte Werte liefert, während die Voraussagen des linearen Modells, das die Delaykopplung mit einbezieht, sehr gut an den Werten des nichtlinearen Modells liegen. Es fällt sofort die fast entgegengesetzte Phase zwischen gekoppeltem und ungekoppeltem Modell auf. Bei den betrachteten Ruheradien dich bei der linearen Resonanz hat die Kopplung offenbar eine sehr große Wirkung. Die ungekoppelte Näherung liefert auch bei kleinen Drücken schon große Schwingungsamplituden. Bei höheren Druckwerten entstehen bei beiden linearen Näherungen negative Radien, was physikalisch nicht sinnvoll ist. Es fällt auf, dass die Trajektorien des

nichtlinearen Modells nicht eingeschwungen sind. Tatsächlich ergibt sich für dieses Blasenpaar eine quasiperiodische Schwingung bei einer sehr langen Transiente bis zur nichtlinearen Sättigung. Die Schwingungsform, die sich für die Blase bei hohem Druck ergibt, lässt sich natürlich mit einer harmonischen Schwingung nicht mehr darstellen. Abbildung 5.4 zeigt die Blasenschwingung bei gleichem Druck, aber größerem Delay $\tau = T/10$. Auf den ungekoppelten Fall hat das Delay keinen Einfluss, doch die Amplitude stimmt mit dem nichtlinearen Fall jetzt besser überein. Bei $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$ schwingt die Blase im vollen Modell bereits nicht mehr harmonisch, so dass auch zum linearen, gekoppelten Modell ein Unterschied zu sehen ist. Dessen Amplitude trifft aber noch recht gut zu. Bei hohem Druck weichen beide lineare Modelle noch mehr vom nichtlinearen Modell ab, als das bei $\tau = T/100$ der Fall war.

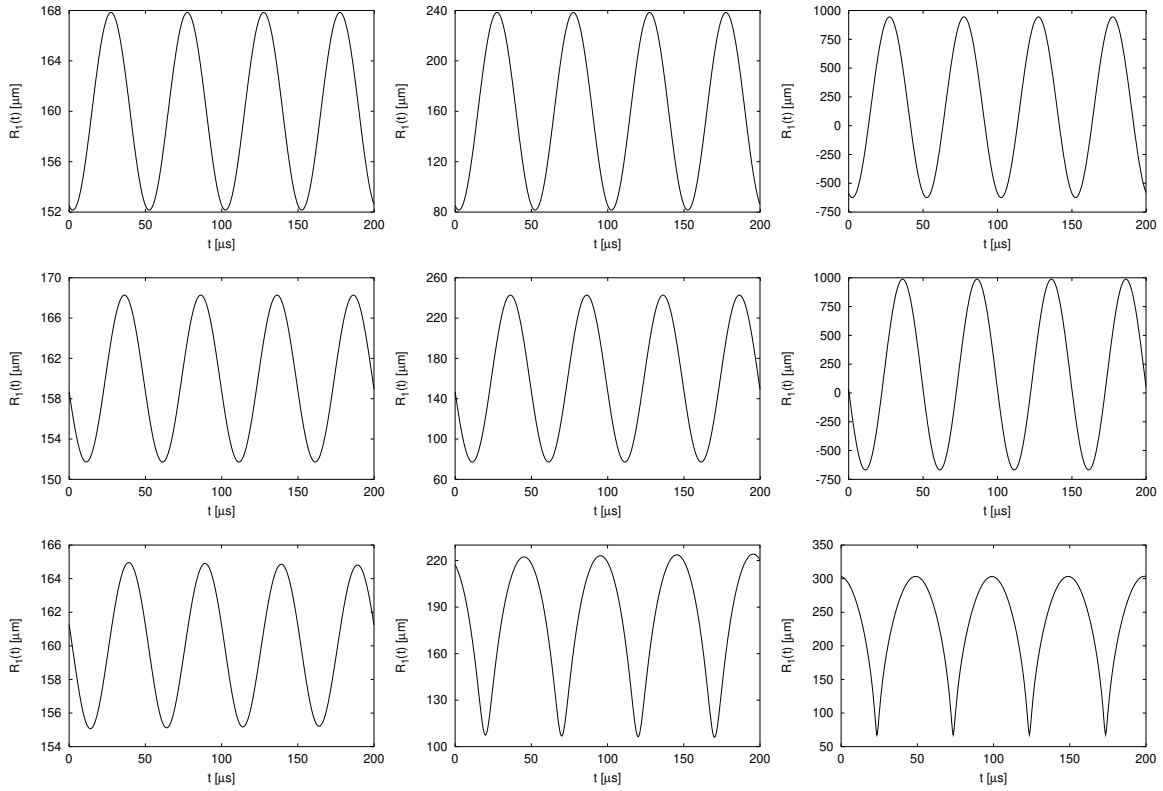

Abbildung 5.4: Trajektorien bei $\tau = T/10$, $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$ (links), $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$ (Mitte) und $p_a = 100\,\mathrm{kPa}$ (rechts) für eine Blase mit einem Ruheradius $R_{10} = 160\,\mu\mathrm{m}$. Die Nachbarblase mit $R_{10} = 163\,\mu\mathrm{m}$ schwingt in $d = 7.5\,\mathrm{mm}$ Entfernung. Bei $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$ schwingt die Blase bereits nicht mehr harmonisch. Die Abweichung bei $p_a = 100\,\mathrm{kPa}$ ist noch größer als in Abb. 5.3.

Die zweite Blase dieses Paares ($R_{20} = 163\,\mu\mathrm{m}$) wird in den Abbildungen 5.5 und 5.6, wieder für $\tau = T/100$ und $\tau = T/10$ gezeigt. Dort liefern beide lineare Modelle bei $\tau = T/10$ eine ähnlich gute Trajektorie, im Sinne einer guten Übereinstimmung mit dem nichtlinearen

Modell, für $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$, während sie bei $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$ bereits negative Radien angeben. Bei $\tau = T/100$ liefert das delay-gekoppelte Modell dagegen für $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$ und $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$ noch gute Werte.

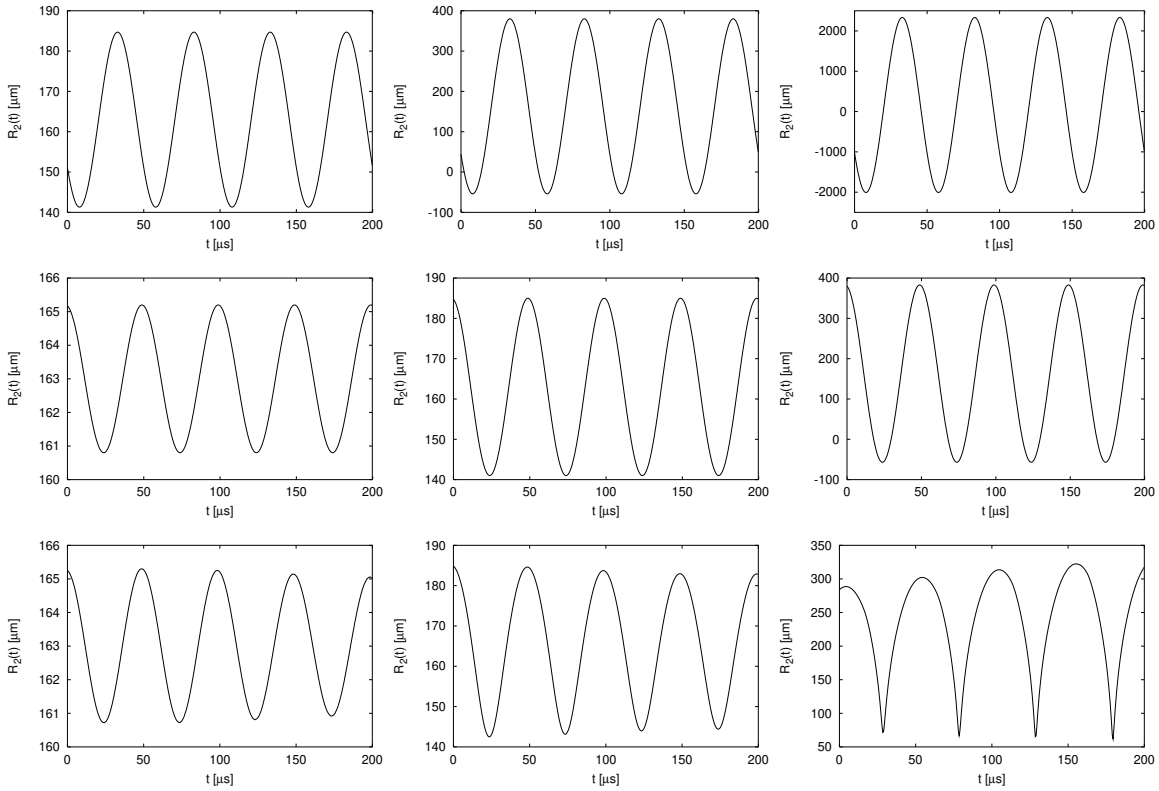

Abbildung 5.5: Trajektorien bei $\tau = T/100$ ($d = 0.70\,\mathrm{mm}$), $p_a = 1\,\mathrm{kPa}$ (links), $p_a = 10\,\mathrm{kPa}$ (Mitte) und $p_a = 100\,\mathrm{kPa}$ (rechts) für die zweite Blase des Paares mit einem Ruheradius von $163\,\mu\mathrm{m}$ (sehr genau auf dem linearen Resonanzradius). Das ungekoppelte Modell liegt sehr weit neben den Werten des nichtlinearen Modells, dessen Zustand nicht richtig eingeschwungen ist; das delay-gekoppelte Modell beschreibt die Blasenschwingung gut für geringe Drücke.

Es zeigt sich also, dass die Blasenschwingung in der Nähe der linearen Resonanz stark von Kopplung und Delay abhängt. Dort sind auch die linearen Näherungen nicht mehr verlässlich, was nicht verwunderlich ist, schwingen die Blasen doch teilweise mit beträchtlichen Amplituden um ihren Ruheradius. Dass die Abweichungen des ungekoppelten Modells gegenüber den beiden delay-gekoppelten Modellen bei $\tau = T/10$ für die Blasen mit einem Ruheradius in der Nähe ihrer Resonanz größer sind, versteht man, wenn man die Abbildungen der Schwingungsamplituden in Kapitel 3.2.1 betrachtet. Bei kleinem Delay sind die Resonanzradien des gekoppelten Modells weit weg von den Resonanzradien des ungekoppelten Modells, während sie mit zunehmenden Delay immer näher rücken (vgl. Abb. 3.9 und Abb. 3.11), da der Einfluss

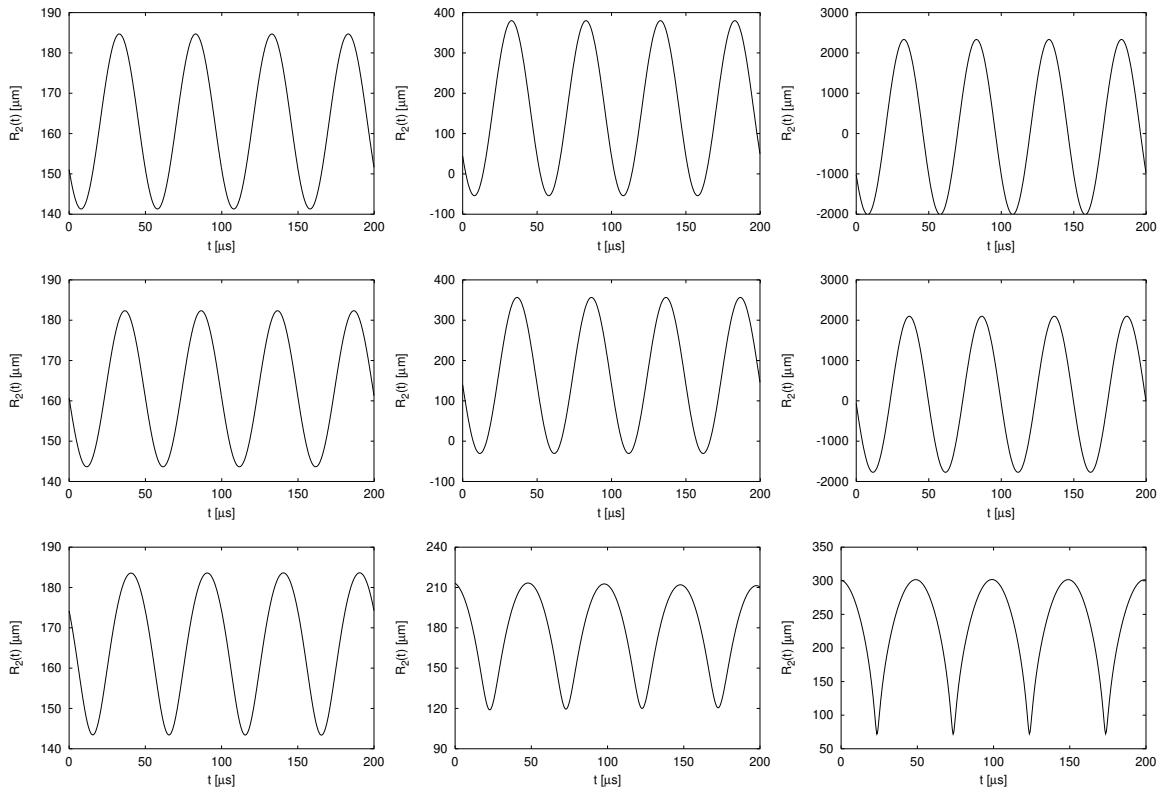

Abbildung 5.6: Trajektorien bei $\tau = T/10$ (7.5 mm), $p_a = 1$ kPa (links), $p_a = 10$ kPa (Mitte) und $p_a = 100$ kPa (rechts) für die zweite Blase des Paares mit einem Ruheradius von $163\,\mu$m. Gute Übereinstimmung aller drei Modelle bei sehr geringem Druck, aber die beiden linearen versagen bereits bei $p_a = 10$ kPa.

der Kopplung mit zunehmenden Abstand abnimmt. Somit macht das ungekoppelte Modell in diesem Bereich bei kleinerem Delay einen größeren Fehler. Bei Ruheradien, die sehr weit von diesen bezüglich des Delays empfindlichen Bereichen liegen, wie es in Abbildung 5.1 und Abbildung 5.2 gezeigt wird, sind die Ergebnisse beider linearen Modelle ähnlich und in guter Übereinstimmung mit der nichtlinearen Theorie.

Es lässt sich also festhalten, dass das ungekoppelte, lineare Modell über weite Strecken annehmbare Ergebnisse produziert, aber andernorts das System der zwei Blasen völlig unzureichend modelliert. Das delay-gekoppelte und linearisierte Modell beschreibt das nichtlineare System, solange dies tatsächlich harmonisch schwingt, exakter.

Kapitel 6
Zusammenfassung und Ausblick

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit lag auf der Berechnung der sekundären Bjerkneskraft und der Untersuchung der Wirkung einer zeitlich verzögerten Kopplung der schwingenden Blasen auf dieselbe. Die sekundäre Bjerkneskraft spielt eine noch nicht exakt verstandene Rolle bei der Strukturbildung, die in Kavitationsblasenfeldern bei geeigneten Parametern zu beobachten ist. Es wurden drei verschiedene Modelle betrachtet, die sukzessive den Einfluss von Delay und Kopplung zwischen zwei sphärischen Blasen mehr in Betracht zogen. Zunächst ein linearisiertes Keller-Miksis-Modell, in dem die Blasen ohne gegenseitige Kopplung schwingen, anschließend ein ebenfalls linearisiertes Modell, bei dem jedoch zur kosinusförmigen antreibenden Kraft ein Term von der Nachbarblase hinzukommt, der die gegenseitige Kopplung wiederspiegelt, und schließlich das volle nichtlineare, delay-gekoppelte System, dessen numerische Behandlung nicht ohne Tücken ist. Die Motivation, ein solches Delay einzuführen liegt in der Berücksichtigung einer endlichen Schallgeschwindigkeit im Medium, die einen kleinen Effekt darstellt, der jedoch nicht notwendig vernachlässigt werden darf, da die sekundäre Bjerkneskraft empfindlich von den Schwingungsphasen abhängt. Zudem sind die zugrundeliegenden Bewegungsgleichungen nichtlinear und können somit empfindlich von ihren Anfangsbedingungen abhängen, und die Einführung eines Delays macht aus einem niedrigdimensionalen System ein zumindest theoretisch unendlichdimensionales System, dessen Lösungen komplex und empfindlich sein können.

Die durch die Delaykopplung auftretenden Effekte, die sich durch den Vergleich der gekoppelten Modelle mit dem einfachsten der drei Modelle erschließen, werden noch einmal zusammengefasst. Am auffälligsten ist der Bruch der Symmetrie der Vorzeichenverteilung in der R_{10}-R_{20}-Ebene. Dies erlaubt sekundäre Bjerkneskräfte, die eine gleichgerichtete Bewegung beider Blasen bewirken, da sich die Blasen nicht mehr *gegenseitig* anziehen oder abstoßen. Es lassen sich Fälle finden, in denen beispielsweise die erste Blase die zweite anzieht, aber von dieser abgestoßen wird. Dieser Effekt wird bereits am ungekoppelten, linearisierten Modell deutlich, das das Delay nur bei der Berechnung der sekundären Bjerkneskraft berücksichtigt. Darüber hinaus verschieben sich die Vorzeichenwechsel durch die Hinzunahme der Delay*kopplung* bei kleinem Delay zu größeren Ruheradien. Dann wird die Bjerkneskraftlandschaft nicht mehr durch die linearen Resonanzen dominiert, und die Extremwerte sind zu größeren Ruheradien verschoben. Die rasante Änderung der Vorzeichenverteilung ist in

diesem Fall stärker auf ein Intervall um $\tau = T/4$ konzentriert. Mit zunehmendem Abstand nimmt der Einfluss der Kopplung ab, und die sekundären Bjerkneskräfte ähneln denen, die das ungekoppelte Modell berechnet hat.

Die nichtlinearen Simulationsrechnungen zeigen gegenüber den linearen Modellen bereits bei sehr kleinen Schalldrücken leichte Abweichungen, die jedoch nicht überwiegen. Es zeigt sich, dass bei einem nicht zu kleinen Delay die Aussagen des linearisierten, delay-gekoppelten Modells auch bei einem Schalldruck von 10 kPa noch gut zu denen des nichtlinearen Modells passen. Bei sehr kleinem Delay und entsprechend starker Kopplung tauchen allerdings Effekte auf, die sich mit diesem Modell nicht mehr erklären lassen. Die Struktur der Vorzeichenmuster wird gerade für große Ruheradien, bei denen die Annahme der Linearisierung, die Blase schwinge mit kleiner Auslenkung um ihren Ruheradius, nicht mehr erfüllt ist, verändert. Erhöht man dann den Druck auf Werte, wie sie für die Strukturbildung typisch sind, finden sich völlig neue Verteilungen, die mit denen bei geringeren Drücken nur noch gemeinsam haben, dass bei $\tau \approx T/4$ der Ausschnitt der R_{10}-R_{20}-Ebene von $100\,\mu$m bis $250\,\mu$m etwa durch die Winkelhalbierende geteilt wird, und die Vorzeichen für noch größeres Delay sich umdrehen. Bei sehr kleinem Delay fand sich eine komplexe Struktur, die den komplizierten Einfluss der zeitlich verzögerten Kopplung auf die Dynamik der dann stark gekoppelten, nichtlinearen Blasenoszillatoren wiederspiegelt.
Schließlich zeigt ein Vergleich der wenigen, aus der Literatur bekannten Ergebnisse zu diesem Thema mit denen des delay-gekoppelten Modells, dass sich die vorhergesagten Kräfte wesentlich unterscheiden. Es zeichnet sich dabei ab, dass eine weitere Druckerhöhung auf moderate Werte die Komplexität des Bjerkneskraftmusters etwas beschneidet, und die zerfransten Muster der Vorzeichenverteilung glättet.

Wie jede Arbeit hinterlässt auch diese offene Fragen, sei es, weil sie sie nicht behandelt hat, sei es, da sich diese Fragen erst durch diese Arbeit ergeben haben.
Ein großes Delay hat einen größeren Einfluss auf das Vorzeichen der sekundären Bjerkneskraft, während sich ein kleines Delay mit der stärkeren Kopplung deutlich auf die Blasenschwingung auswirkt. Diese Effekte gilt es nun gegeneinander abzuwägen. Auch ein Vergleich der primären und der sekundären Bjerkneskraft drängt sich auf, um festzustellen, wie man sie für die Modellierung der Strukturbildung durch das Partikelmodell verwenden muss. Für die Strukturbildung darf davon ausgegangen werden, dass der Einfluss des Delays spürbar sein wird. Die Ergebnisse aus dieser Arbeit und aus [25] sind teilweise zu unterschiedlich, als das man darüber einfach hinwegsehen dürfte. Dies wird Gegenstand zukünftiger Untersuchungen sein.
Der nur kurz erwähnte Effekt der „super-resonanten“ Blaasenpaare macht ebenfalls neugierig auf weitere numerische Simulationsrechnungen. Und letztlich ist es auch die Aufgabe der Physik, die in der Simulation mit einem Modell gefundenen, theoretischen Erkenntnisse auch experimentell zu verifizieren oder falsifizieren. So werden sicherlich Experimente durchgeführt werden, die untersuchen, ob der Einfluss der endlichen Schallgeschwindigkeit

eher theoretischer Natur ist, und somit getrost vernachlässigt werden darf, oder ob er tatsächlich für das Entstehen und Verstehen der wunderschönen Strukturen mitverantwortlich ist.

Doch das ist eine andere Geschichte und soll ein andermal erzählt werden.

Do not meddle in the affairs of Wizards,
for they are subtle and quick to anger.[1]
GILDOR INGLORION

Anhang A
Delaydifferentialgleichungen

Häufig findet man in der Physik und in anderen Wissenschaften Problemstellungen, bei denen die Einflüsse einiger Größen erst verzögert, mit einem Delay behaftet, auftreten. So stellt die Schwangerschaftszeit in der Populationsforschung ebenso ein Delay dar, wie die Blutzirkulation bei der medikamentösen Behandlung. Bei rückgekoppelten Systemen (s. z. B. [1] für rückgekoppelte Halbleiterlaser) ist die Zeit der Rückkopplung endlich, wie auch die Zeit bei Wechselwirkungsphänomenen. Diese mögen vielleicht mit Lichtgeschwindigkeit stattfinden, bleiben aber endlich schnell. Oftmals ist der Einfluss dieser Verzögerung zu vernachlässigen. Bei nichtlinearen Systemen, die ja empfindlich von ihren Systemparametern abhängen, muß das allerdings nicht notwendig der Fall sein, ebenso kann eine lineare Abbildung an Komplexität gewinnen.
Die Formen des Delays sind vielfältig. Ein Delay mag kurz sein bei mit Lichtgeschwindigkeit wechselwirkenden Systemen, die räumlich nicht weit voneinander entfernt sind, oder lang z. B. in der Populationsforschung. Das Delay kann auch durch eine Funktion, die eventuell auch vom Zustand des Systems selber abhängt, gegeben sein. Im hier vorliegenden Fall der Kavitationsblasendynamik wurde jedoch ein konstantes Delay angenommen.

A.1. Numerische Lösung von Delaydifferentialgleichungen

In diesem Abschnitt wird das Verfahren beschrieben, mit dem in dieser Arbeit die Delaydifferentialgleichungen numerisch gelöst wurden. Es basiert auf einem Verfahren, das von BAKER et al. 1994 in Manchester in [4] beschrieben wurde.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung hat die Form

$$\dot{y}(t) = F(t, y(t), \vec{\mu}), \quad \text{mit einem Parametervektor } \vec{\mu}. \tag{A.1}$$

Dagegen hat die entsprechende Delaydifferentialgleichung die Form

$$\dot{y}(t) = F(t, y(t), y(t-\tau), \vec{\mu}), \tag{A.2}$$

[1] Gildor Inglorion in *The Lord of the Rings* von J. R. R. Tolkien

mit einem (in dieser Arbeit) konstanten Delay $\tau > 0$. Wenn die Ableitung $\dot{y}(t)$ zudem noch von der Ableitung zu einem früheren Zeitpunkt abhängt,

$$\dot{y}(t) = F(t, y(t), y(t-\tau), \dot{y}(t-\tau), \vec{\mu}), \tag{A.3}$$

spricht man von einer *neutralen Delaydifferentialgleichung* ([32],[12],[4]). Da im Keller-Miksis-Modell im Kopplungsterm auch die Ableitung des Blasenradius der ankoppelnden Blase auftaucht, liegt hier also eine solche neutrale Delaydifferentialgleichung vor. Der Zustand eines solchen Systems wird nur durch die abhängigen Variablen nicht ausreichend beschrieben. Vielmehr benötigt man noch die Funktionswerte eines Intervalls, das bis zum Zeitpunkt $t-\tau$ zurückreicht. Somit hat man also eine unendlichdimensionale Differentialgleichung vorliegen, für die eine aufwendige Behandlung notwendig ist. Im Folgenden wird das Lösungsverfahren für eine einfache Delaydifferentialgleichung gezeigt, wie sie BAKER et al. beschrieben haben. Dieses Verfahren lässt sich leicht auf neutrale Delaydifferentialgleichungen anwenden.

Die Lösung der Gleichung erfolgt auf kleinen Intervallen $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$, auf denen die Gleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung transformiert wird. Dies ist der wesentliche Schritt zur Lösung einer Delaydifferentialgleichung nach der Methode, die Baker die „Method Of Steps“ nennt.

Sei $\{\sigma_i\}$ die Menge aller Punkte, die durch $t_0 + i\tau$ beschrieben werden. Nun setzt man auf jedem so entstandenem Teilintervall $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= F(t, y_1(t), \Psi(t-\tau), \vec{\mu}) && (\sigma_0 \le t \le \sigma_1) \\
\dot{y}_2(t) &= F(t, y_2(t), y_1(t-\tau), \vec{\mu}) && (\sigma_1 \le t \le \sigma_2) \\
&\vdots \\
\dot{y}_m(t) &= F(t, y_m(t), y_{m-1}(t-\tau), \vec{\mu}) && (\sigma_{m-1} \le t \le \sigma_m),
\end{aligned} \tag{A.4}$$

wobei $\Psi(t)$ eine Funktion ist, die $y(t)$ für $t_0 - \tau \le t \le t_0$ festlegt.
Damit ist $y(t) = y_l(t)$ für $t \in [\sigma_{l-1}; \sigma_l]$ und $y(t) = \Psi(t)$ für $t_0 - \tau \le t \le t_0$. Wenn nun $y_{m-1}(t)$ bereits bekannt ist, ist

$$\dot{y}_m(t) = F(t, y(t), y_{m-1}(t-\tau), \vec{\mu}) \quad (\sigma_{m-1} \le \sigma_m) \tag{A.5}$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung, die mit einer beliebigen um eine Interpolationsroutine zur Beschaffung der verzögerten Funktionswerte erweiterten Routine (s. u.) numerisch gelöst werden kann.

Wie BAKER et al. beschrieben haben, funktioniert dieses Verfahren auch für ein variables Delay solange es nur nicht verschwindet. In einem solchen Fall wird lediglich die Beschreibung der σ_i etwas schwieriger.

Man muß nun dafür sorgen, dass die Lösung dicht ist. Benötigt man einen verzögerten Funktionswert, so darf man nicht davon ausgehen, diesen bereits berechnet zu haben, schließlich

erfolgt eine numerische Lösung immer nur in diskreten Schritten endlicher Länge. Somit wird eine Interpolationsroutine bei der Beschaffung der verzögerten Werte eingesetzt, um diese Anforderung zu erfüllen. Dabei sollte die Ordnung der Interpolationsroutine höher sein als die der Integrationsroutine ([27]), damit deren Ordnung sichergestellt wird. Diese Interpolationsroutine bewältigt zudem die unendlich vielen Dimensionen, die durch die Funktionswerte des zurückliegenden Intervalls in die Delaydifferentialgleichung kommen.

Ein weiter Punkt, der besonderer Beachtung bedarf, ist die Fortpflanzung von Diskontinuitäten. Tritt (z. B. durch entsprechende Wahl der Initialisierungsfunktion $\Psi(t)$) an der Stelle $t_0 = 0$ eine solche Unstetigkeit auf, so setzt sie sich über die Ableitung fort und führt zum Zeitpunkt $t_1 = \tau$ zu einem Knick in der Lösung. Zum Zeitpunkt $t_2 = 2\tau$ findet sich die Unstetigkeit in der 2. Ableitung wieder, usw. Die Lösung wird jedoch während der Fortpflanzung immer glatter, so dass sich der Einfluss dieser Unstetigkeit immer mehr verliert. Dieses Verhalten gilt selbstverständlich nur für „normale“ Delaydifferentialgleichungen. Bei neutralen Gleichungen bleibt die nicht differenzierbare Stelle stets erhalten und „wandert“ nicht in höhere Ableitungen, da sie ja immer wieder zu einem Sprung in der Ableitung führt. In den Rechnungen der hier vorliegenden Arbeit wurde die Initialisierungsfunktion meist einem bereits (meist ohne Delay) eingeschwungenen System entnommen oder aber konstant auf die Startwerte der betroffenen Variablen gesetzt, um dieses Problem zu umgehen bzw. einzuschränken. Lesenswert sind in dieser Richtung noch die Ergebnisse aus [24] von LOSSON et al. , wo gezeigt wird, dass eine um ein Delay erweiterte Form der kontinuierlichen logistischen Abbildung bei bestimmten Parametern zwei koexistierende Attraktoren besitzt, deren Erreichen empfindlich von der Initialisierungsfunktion abhängt.

Es liegt auf der Hand, dass die Schrittweite des Integrators kleiner als das Delay sein muß, damit die Delaydifferentialgleichung nicht zu einer impliziten Gleichung wird, für die eine andere Form der Behandlung notwendig wäre, oder aber für die Interpolationsroutine nicht mehr ausreichend Stützstellen zur Verfügung stehen, um die nötige Ordnung zu erreichen.

A.2. Implementierung eines Delaydifferentialgleichungenlösers

Bei der Lösung der im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Delaydifferentialgleichungen wurden zwei Vorgehensweisen gewählt. Beide Verfahren stießen während der vorgenommenen Rechnungen an ihre Grenzen, dennoch ließen sich befriedigende Ergebnisse erstellen.

Der erste Löser war ein C-Programm, das auf kleinen Teilintervallen eines durch das Delay gegebenen τ-Intervalls die Routine `odeint` wahlweise mit `bsstep`, das eine Bulirsch-Stoer Methode implementiert, oder mit `rkqs` (alle aus [31]) für ein Runge-Kutta Verfahren aufrief. Diese Routinen wurden teilweise noch modifiziert, um sie an die Erfordernisse einer Delaydifferentialgleichung anzupassen. Die Interpolation übernahm dabei das aufrufende Programm selber mittels `polint` (ebenfalls aus [31]) mit 6 Stützstellen, also 5. Ordnung. Diese Methode eignete sich sehr gut zum Lösen der Bewegungsgleichungen für einzelne und

für delay-gekoppelte Kavitationsblasen in bestimmten Parameterbereichen. Auch die in Anhang B betrachteten Gleichungen wurden mit diesem Programm gelöst. Dennoch erwies es sich als zu instabil. Eine mögliche Ursache wären die oben erwähnten Unstetigkeiten, die bei dem verwendeten Blasenmodell nicht unbeachtet bleiben dürfen, da es sich um eine neutrale Gleichung handelt, hier aber nicht gesondert behandelt wurden.

Eine Routine, die genau dieses leistet ist die Fortran-Routine `DKLAG6` von S. Thompson, die ein auf Delaydifferentialgleichungen erweitertes Runge-Kutta-Verfahren 6. Ordnung implementiert, unter [33] erhältlich ist, und in [35] und in [34] tiefgehender beschrieben wird. Sie implementiert außerdem eine explizite Behandlung der kritischen Stellen, an denen Unstetigkeiten auftreten können und liefert zusammen mit dem stark optimierenden Fortran Compiler ein Programm, das letztendlich stabiler und schneller läuft, als das in C geschriebene. Somit wurden nach der Anpassung von `DKLAG6` an das gegebene Problem die meisten der Ergebnisse in Kapitel 4 damit erzielt. Nur am Rande sei hier für den interessierten Leser erwähnt, dass `DKLAG6` auch für variables und verschwindendes Delay geeignet und auf einer Vielzahl von Plattformen compilierbar ist.

Anhang B
Beispiel für ein einfaches Delaysystem

B.1. Delay in der logistischen Gleichung

Um sich einen Eindruck zu verschaffen, welchen Einfluss die Einführung eines Delays hat, soll an dieser Stelle die logistische Gleichung als ein Beispiel betrachtet werden.

Die zeitdiskrete logistische Gleichung

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n), \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{B.1}$$

ist ein gut untersuchtes und gut verstandenes Standardbeispiel für ein nichtlineares System mit chaotischen Lösungen. Man findet bei ihr die charakteristischen Eigenschaften nichtlinearer Systeme. Über eine Periodenverdopplungskaskade führt sie für sukzessive Erhöhung des Parameters λ ins Chaos ([16]).
Die kontinuierliche logistische Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \lambda x(t)(1-x(t)) \tag{B.2}$$

dagegen verhält sich völlig unchaotisch und monoton, denn für das Auftreten von Oszillationen in kontinuierlichen Systemen benötigt man ein System von mindestens zwei Differentialgleichungen erster Ordnung. Um chaotisches Verhalten zu beobachten, benötigt man mindestens drei ([13]). Eine Delaydifferentialgleichung ist nun im Prinzip unendlichdimensional, so dass auch bei nur einer abhängigen Variablen komplexes Verhalten und Chaos auftreten können.
Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Gleichung (B.2) zu einer Delaydifferentialgleichung zu erweitern. Eine von SAATY et al. in [32] untersuchte Form ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \lambda x(t)(1-x(t-\tau)), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{B.3}$$

Laut SAATY kann diese Gleichung nun alle Verhaltensweisen nichtlinearer Gleichungen zeigen.

- monotones Verhalten wie bei der kontinuierlichen logistischen Gleichung ohne Delay für $\lambda \in (0, 1/e)$

- Oszillieren um ein Gleichgewicht für $\lambda \in [1/e, \pi/2]$
- chaotisches Verhalten für $\lambda > \pi/2$

Diese Eigenschaften konnten mit dem hier verwendeten numerischen Löser gut nachgewiesen werden. Allerdings wurde bei den Rechnungen in dieser Arbeit kein Chaos, wie es von BAKER et al. beschrieben wurde, bzw. „nicht charakteristische Muster“, wie von SAATY et al. behauptet, für $\lambda > \pi/2$ gefunden, sondern periodische Schwingungen mit hohen Amplituden (vgl. Abb. B.1.

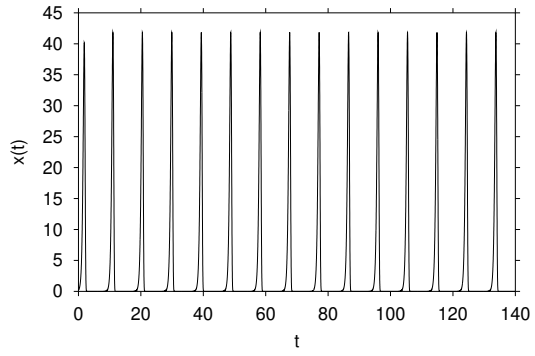

Abbildung B.1.: Keine chaotische Schwingung für $\lambda > \pi/2$ bei einem Startwert von $x(0) = 0.5$; entgegen den Angaben von SAATY.

Es wurde noch eine weitere, von (B.3) abweichende Form der kontinuierlichen logistischen Delaygleichung betrachtet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \lambda x(t-\tau)(1-x(t-\tau)). \tag{B.4}$$

Im folgenden sollen nun einige Eigenschaften dieser Gleichung untersucht werden. Wie die Abbildungen B.2 und B.3 zeigen ist bei einem Delay von $\tau = 0.01$ bei $\lambda = 1$ noch kein Unterschied zu sehen.

Erhöht man nun das Delay auf $\tau = 0.5$, beginnt das System ein etwas komplexeres Verhalten zu zeigen. Die Abbildungen B.5 bis B.9 zeigen, dass die Lösung für wachsendes $\lambda = 1 \ldots 5.25$ zunächst monoton verläuft (Abb. B.5), sich dann langsam aufschaukelt (Abb. B.6 und B.7) und schließlich in ein periodisches ungedämpftes Verhalten übergeht (Abb. B.8 und B.9). Erhöht man λ noch weiter divergiert die Lösung nach $-\infty$. Es wurde eine Art Phasendiagramm erstellt und in Abbildung B.10 dargestellt.

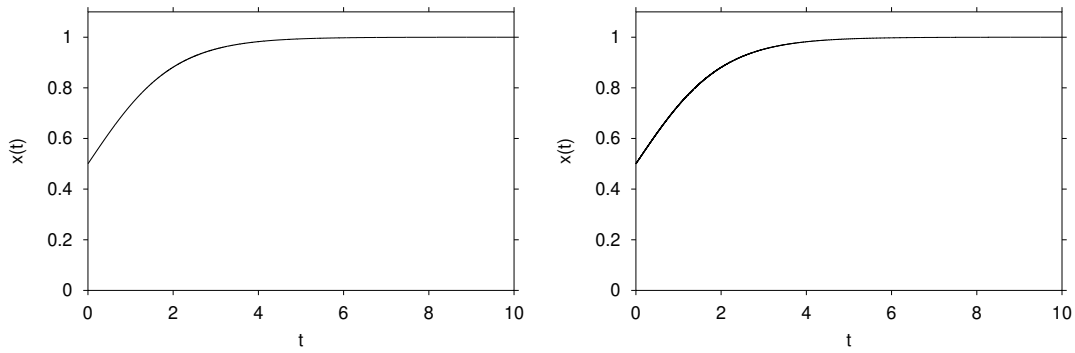

Abbildung B.2.: Lösung der logistischen Gleichung für sehr kleines Delay $\tau = 0.01$ (links) bzw. ohne Delay (rechts) bei $\lambda = 1$. Es ist kein Unterschied zu sehen.

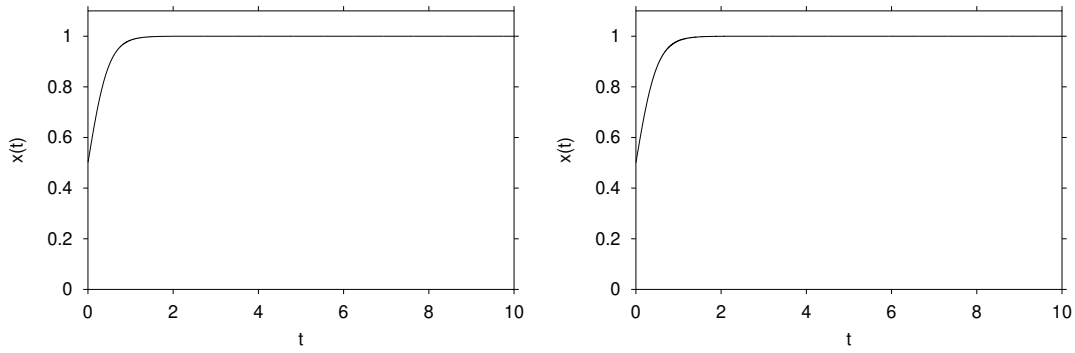

Abbildung B.3.: Lösung der logistischen Gleichung für sehr kleines Delay $\tau = 0.01$ (links) bzw. ohne Delay (rechts) bei $\lambda = 4$. Es ist kein Unterschied zu sehen.

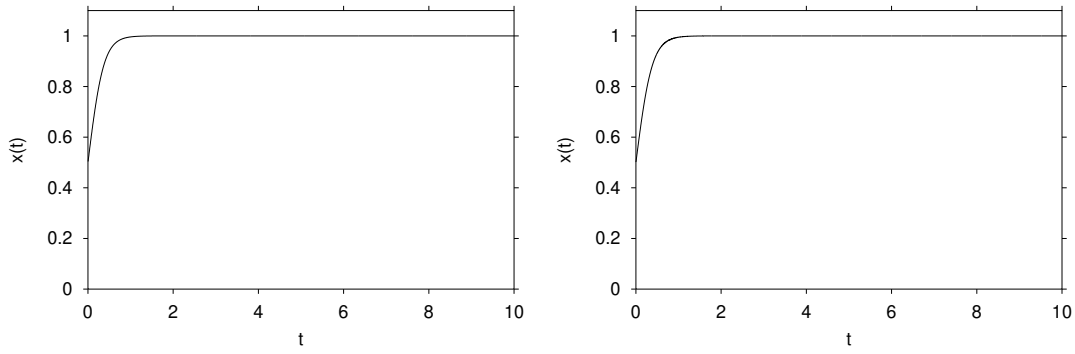

Abbildung B.4.: Lösung der logistischen Gleichung für sehr kleines Delay $\tau = 0.01$ (links) bzw. ohne Delay (rechts) bei $\lambda = 5.25$. Es ist kein Unterschied zu sehen.

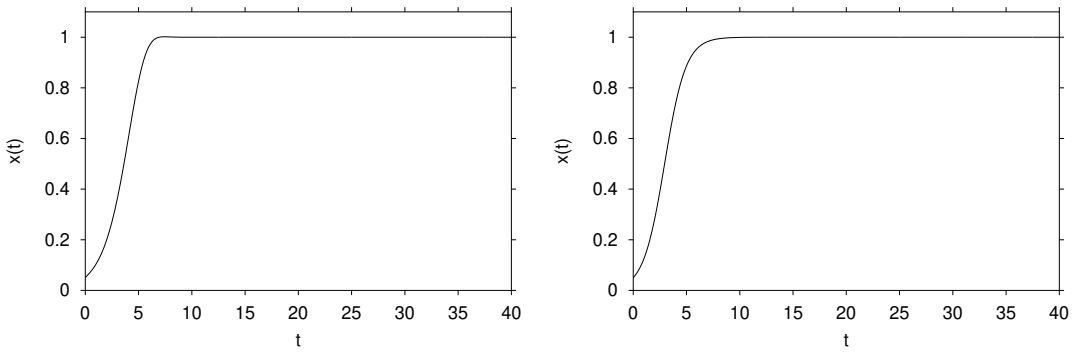

Abbildung B.5.: Lösung der logistischen Gleichung für $\lambda = 1$ und $\tau = 0.5$ (links) bzw. ohne Delay (rechts): monotones Verhalten (mit leichtem Überschwingen bei $t \approx 7$).

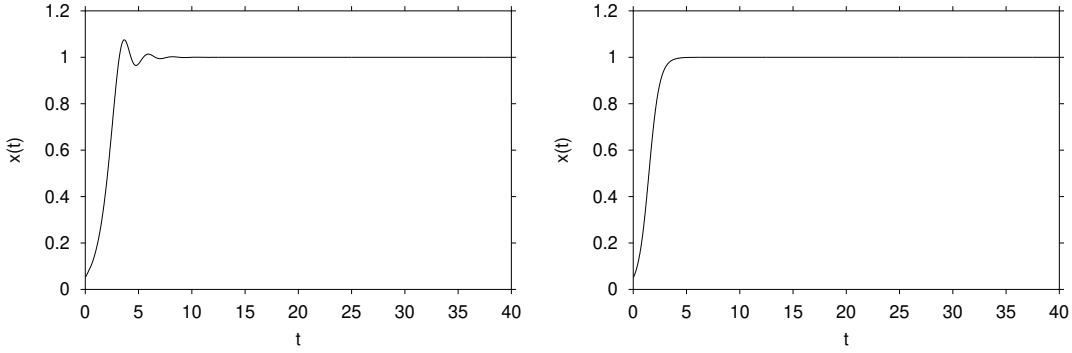

Abbildung B.6.: Lösung der logistischen Gleichung für $\lambda = 2$ und $\tau = 0.5$(links) bzw. ohne Delay (rechts). Die Schwingung beginnt, ist aber noch sehr stark gedämpft.

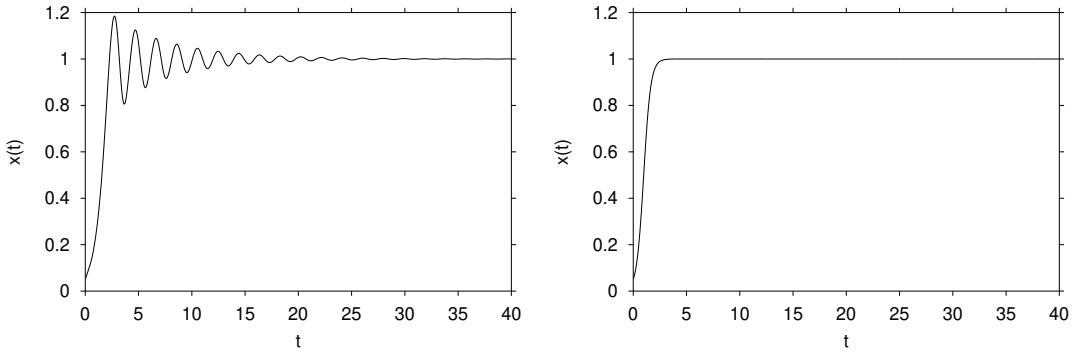

Abbildung B.7.: Lösung der logistischen Gleichung für $\lambda = 3$ und $\tau = 0.5$ (links) bzw. ohne Delay (rechts). Die Dämpfung nimmt gegenüber Abbildung B.6 deutlich ab.

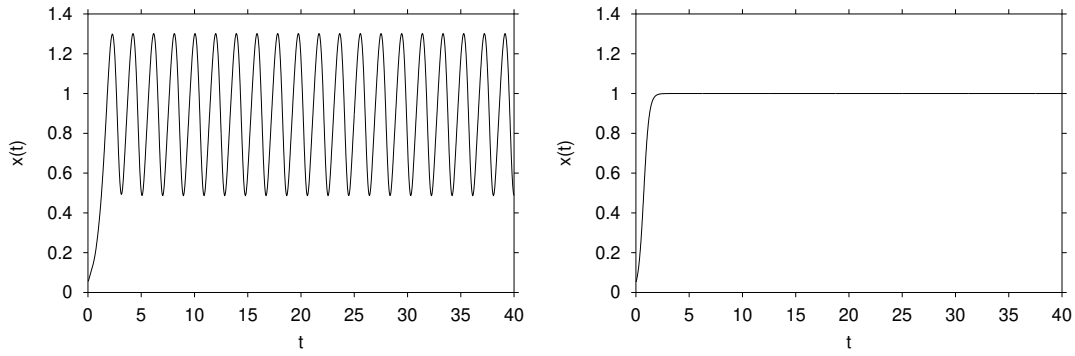

Abbildung B.8.: Lösung der logistischen Gleichung für $\lambda = 4$ und $\tau = 0.5$ (links) bzw. ohne Delay (rechts). Die Lösung schwingt periodisch mit $T \approx 1.93$.

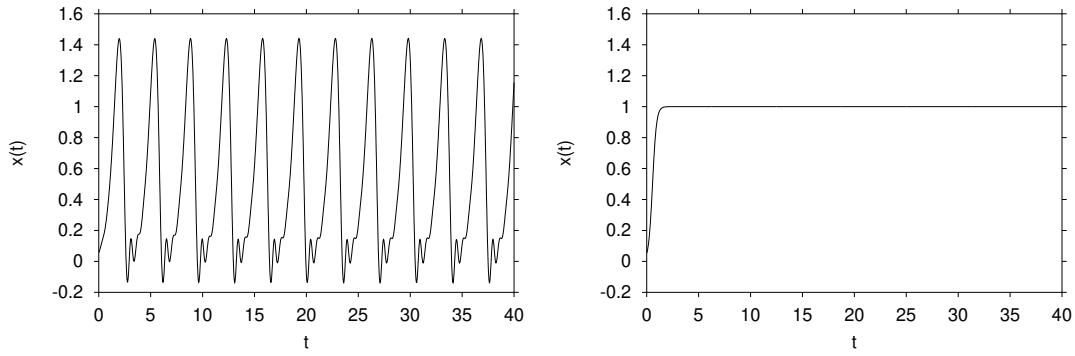

Abbildung B.9.: Lösung der logistischen Gleichung für $\lambda = 5.25$ und $\tau = 0.5$ (links) bzw. ohne Delay (rechts). Nicht sinusförmige, periodische Lösung mit $T \approx 3.49$.

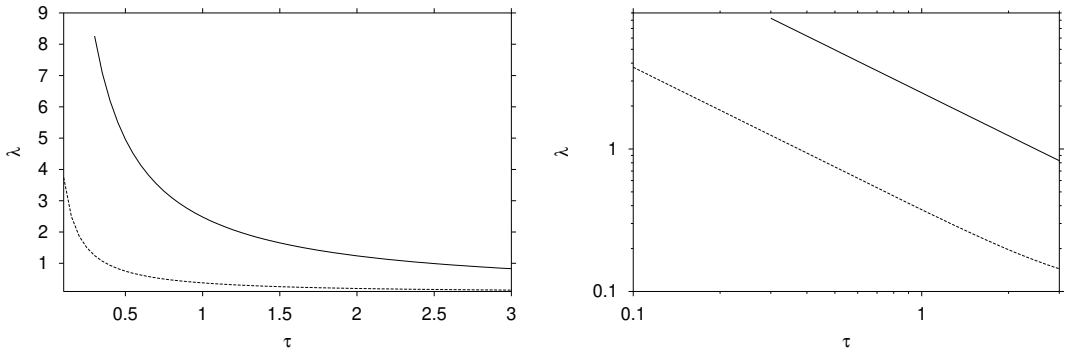

Abbildung B.10.: Gestrichelt: $\lambda(\tau)$-Kurve, bei der das monotone Verhalten der Lösung endet. Durchgezogen: $\lambda(\tau)$-Kurve, oberhalb derer die Lösung divergiert. Somit umfasst der Bereich zwischen den Kurven sowohl den gedämpft schwingenden Lösungsraum als auch den Bereich, in dem periodische Lösungen auftreten. Im rechten Bild sind die Werte doppelt-logarithmisch aufgetragen. Der λ-Wert für den Beginn der Schwingung und der für den Beginn der Divergenz folgen also einem $1/\lambda$ Gesetz. Dies lässt sich sicherlich auch durch eine Stabilitätsanalyse von Gleichung (B.4) zeigen, ist jedoch nicht Ziel dieser Arbeit.

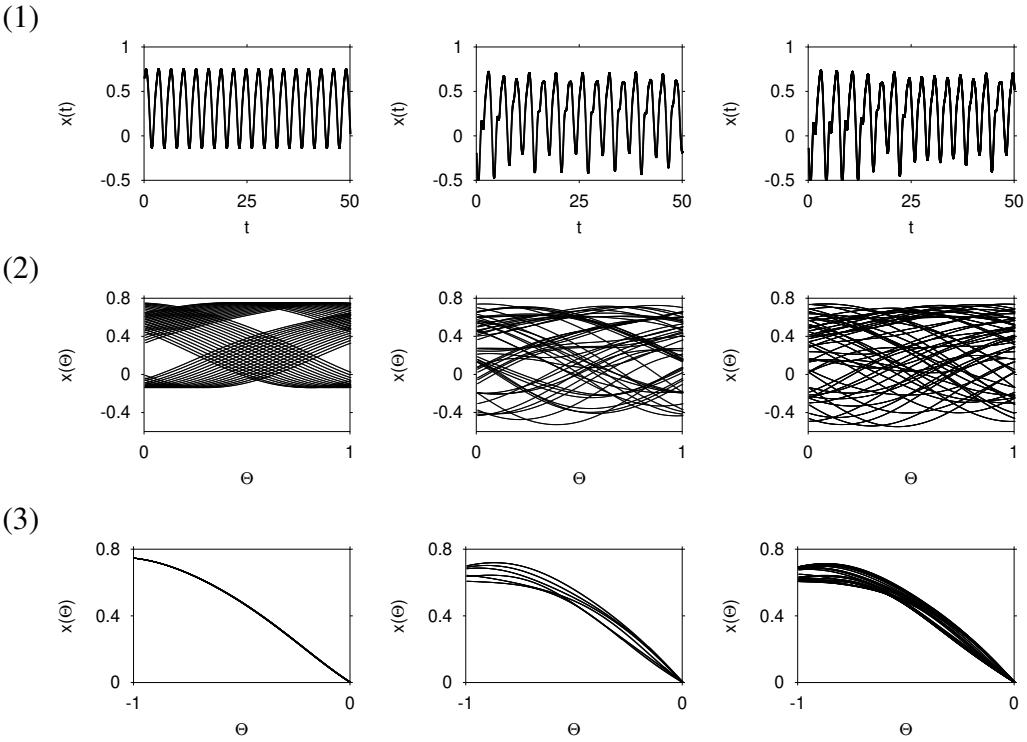

Abbildung B.11.: Zeitreihe (1), Poincaré-Schnitt bei festem t (2) und erweiterter Poincaré-Schnitt (3) für $\lambda = 3.0, 4.385, 4.45$.

B.2. Erweiterung des Poincaré-Schnitts auf Delaydifferentialgleichungen

HONG et al. haben in [15] eine Erweiterung des herkömmlichen Poincaré-Schnitts erarbeitet. Bei nichtlinearen Systemen dient die Poincaré-Abbildung dazu, die Dimension zu verringern, wodurch z. B. periodische Lösungen auf Fixpunkte abgebildet werden (s. z. B. [13]).

In Abbildung B.11 ist in der ersten Zeile eine Zeitreihe aufgetragen. Links sieht man deutlich eine periodische Lösung, bei der mittleren ist dieses schwierig und bei der rechten Abbildung mag man keine Prognose mehr geben. Man kann nun die Lösung des Systems gewissermaßen stroboskopisch beleuchten, indem man in festen Intervallen ein ganzes durch θ parametrisiertes Kurvenstück der Zeitreihe der Länge τ betrachtet. Wie man in Abbildung B.11 in der zweiten Zeile sieht, ist bereits für den sonst leicht zu erkennenden periodischen Fall keine eindeutige Aussage zu treffen, da im Allgemeinen $T \neq \frac{n}{m} \cdot \tau$. Würde man über einen noch längeren Zeitraum belichten, als es dort getan wurde, würde man eine mehr und mehr geschwärzte Fläche erhalten. Somit wäre keine Aussage über die Periodizität mehr möglich.
Die Idee von HONG et al. war es nun, nicht zu festen *Zeiten* sondern bei einem festen *Wert der Lösung*, wenn dieser in der selben Richtung durchschritten wurde, ein Kurvenstück aufzuzeichnen. Dies ist in der Abbildung B.11 in der dritten Zeile dargestellt. Nun erkennt man leicht die Periodizität der Lösung, indem man die Anzahl der gezeigten Kurvenstücke zählt. Links eine Periode-1, in der Mitte eine Periode-6 und ganz rechts eine offenbar chaotische (oder aber sehr hochperiodische) Lösung.

Die in der Abbildung gezeigte Funktion ist eine weitere Variante der kontinuierlichen logistischen Gleichung mit Delay:

$$\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = -x(t) + 1 - \lambda x(t-\tau)^2 \tag{B.5}$$

mit $\gamma = 0.81$ und $\tau = 1$. Die Bilder wurden nicht aus [15] übernommen, sondern explizit nachgerechnet und bestätigen die Ergebnisse von Hong. Die Parameter bei der Rechnung waren $\lambda = 3$, $\lambda = 4.384$ und $\lambda = 4.45$. Bei $\lambda = 3$ findet man eine Periode-1-Lösung mit $T = 3.04$, bei $\lambda = 4.384$ eine Periode-6-Lösung mit $T = 19.2$ und für $\lambda = 4.45$ chaotisches Verhalten.

Weitergehend wurde hier in dieser Gleichung mit Parametern, die einem Bifurkationsdiagramm in [15] entnommen wurden, in Übereinstimmung mit dem Diagramm noch ein Periode-4 und ein Periode-2-Fenster gefunden. Abbildung B.12 zeigt die entsprechenden Bilder.

LOSSON et al. bezeichnen in [24]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = -\alpha x + \lambda x(t-\tau)(1 - x(t-\tau)) \tag{B.6}$$

als die *logistische Delaydifferentialgleichung* und liefern damit noch eine zusätzliche Variante. Sie zeigen, dass sie sogar empfindlich von der Initialisierungsfunktion $\Psi(t), -\tau \leq t < 0$

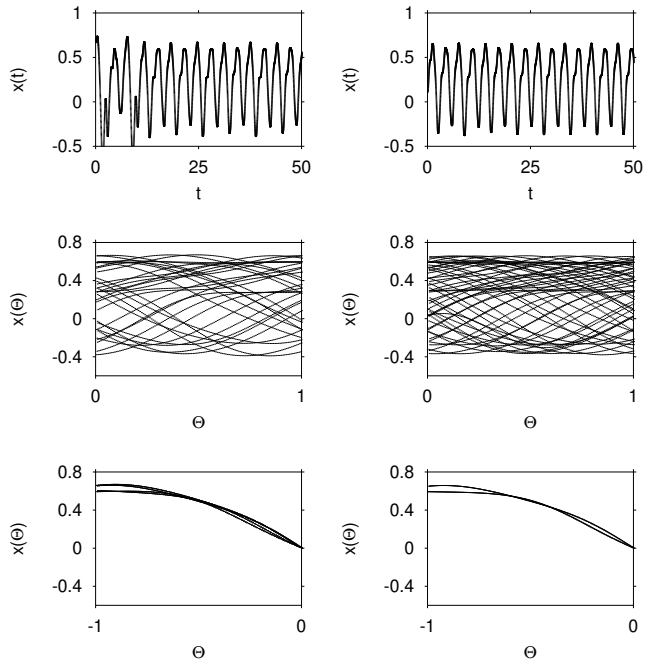

Abbildung B.12.: Zwei weitere Poincaré-Schnitte zu der Gleichung (B.5). Eine Periode-4 Lösung und eine mit Periode-2 bei $\lambda = 4.9$ bzw. $\lambda = 5.0$.

abhängt. Bei kleinen Variationen in der Initialisierungsfunktion können zwei verschiedene Attraktoren erreicht werden.

Literaturverzeichnis

[1] Volker Ahlers: *Nichtlineare Dynamik und Synchronisation chaotischer Halbleiterlaser mit externen optischen Resonatoren*. Diplomarbeit, Drittes Physikalisches Institut, Göttingen, 1998.

[2] I. Akhatov, R. Mettin, C. D. Ohl, U. Parlitz und W. Lauterborn: Bjerknes force threshold for stable single bubble sonoluminescence. *Phys. Rev. E* **55**, 3747–3750, 1997.

[3] I. Akhatov, U. Parlitz und W. Lauterborn: Pattern formation in acoustic cavitation. *J. Acoust. Soc. Am.* **96**, 3627–3635, 1994.

[4] C. T. H. Baker, C. A. H. Paul und D. R. Willé: Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations. Techn. Ber. 248, University of Manchester/UMIST, Manchester Centre for Computational Mathematics, April 1994.

[5] B. P. Barber, R. A. Hiller, R. Löfstedt, S. J. Putterman und K. R. Weninger: Defining the unknowns of sonoluminescence. *Physics Reports* **281**, 64–143, 1997.

[6] R. E. Bellman, J. D. Buell und R. E. Kalaba: Numerical integration of a differential-difference equation with a decreasing time-lag. *Comms. ACM* **8**, 227–228, 1965.

[7] R. E. Bellman, J. D. Buell und R. E. Kalaba: Mathematical experimentation in time-lag modulation. *Comms. ACM* **9**, 752–753, 1966.

[8] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajw: *Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart, Leipzig, 25. Aufl., 1991.

[9] L. A. Crum: Bjerknes forces on bubbles in a stationary sound field. *J. Acoust. Soc. Am.* **57**(6), 1363–1370, 1975.

[10] A. A. Doinikov und S. T. Zavtrak: On the mututal interaction of two gas bubbles in a sound field. *Phys. Fluids* **7**(8), 1923–1930, 1995.

[11] S. Fujikawa und H. Takahira: A theoretical study on the interaction between two spherical bubbles and radiated pressure waves in a liquid. *Acustica* **61**, 188–199, 1986.

[12] K. Gopalsamy: *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*. Kluwer, 1992.

[13] J. Guckenheimer und P. Holmes: *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, New York, 1986.

[14] J. K. Hale und S. M. V. Lunel: *Introduction to Functional Differential Equations*, Bd. 99 von *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1993.

[15] Z. Hong, Z. Feizhou, Y. Jie und W. Yinghai: Nonlinear differential delay equations using the poincare section technique. *Phys. Rev. E* **54**(6), 6925–6928, 1996.

[16] A. E. Jackson: *Perspectives of Nonlinear Dynamics*. Cambridge UP, 1991.

[17] V. F. Kazantsev: The motion of gaseous bubbles in a liquid under the influence of Bjerknes forces arising in an acoustic field. *Sov. Phys. Doklady* **4**(1), 1250–1253, [Original: Doklady Akad. Nauk SSSR, **129**, 64-67, (1959)], 1960.

[18] J. B. Keller und M. Miksis: Bubble oscillations of large amplitude. *J. Acoust. Soc. Am* **68**(2), 628–633, 1980.

[19] W. Lauterborn: Numerical investigation of nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids. *J. Acoust. Soc. Am* **59**, 283–293, 1976.

[20] W. Lauterborn: Akustische Kavitation: ein typisches, nichtlineares dynamisches System. *Acustica* **75**, 145–153, 1991.

[21] W. Lauterborn und R. Mettin: Nonlinear bubble dynamics. In: *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, Leavenworth (WA)*, herausgegeben von L. A. Crum, S. 18–29, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[22] T. G. Leighton: *The Acoustic Bubble*. Academic Press, London, 1994.

[23] G. C. Lichtenberg: *Novi Commentari Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis*, Kap. De nova methodo naturam ac motum fluidi electrici investigandi, S. 168–180. Commentationes physicae et mathematicae classis, Joann. Christian Dieterich, Gottingae, VIII Aufl., 1778.

[24] J. Losson, M. C. Mackey und A. Longtin: Solution multistability in first-order nonlinear differential delay equations. *Chaos* **3**(2), 167–176, 1993.

[25] R. Mettin, I. Akhatov, U. Parlitz, C. D. Ohl und W. Lauterborn: Bjerknes forces between small cavitation bubbles in a strong acoustic field. *Phys. Rev. E* **56**, 2924, 1997.

[26] M. Minnaert: On musical air-bubbles and the sound of running water. *Phil. Mag.* **16**, 235–248, 1933.

[27] H. J. Oberle und H. J. Pesch: Numerical treatment of delay differential equations by Hermite interpolation. *Numer. Math.* **37**, 235–255, 1981.

[28] H. N. Oguz und A. Prosperetti: A generalization of the impulse and virial theorems with an application to bubble oscillations. *J. Fliud. Mech.* **218**, 143–162, 1990.

[29] U. Parlitz, V. Englisch, C. Scheffczyk und W. Lauterborn: Bifurcation structure of bubble oscillations. *J. Acoust. Soc. Am* **88**, 1061–1077, 1990.

[30] U. Parlitz, R. Mettin, S. Luther, I. Akhatov und M. Voß: Spatiotemporal dynamics of acoutic cavitation bubble clouds. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* Submitted, 1998.

[31] W. H. Press, W. T. Vetterling, S. A. Teukolsky und B. P. Flannery: *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 2. Aufl., 1994.

[32] T. L. Saaty: *Modern Nonlinear Mathematics*. Dover, New York, 1967.

[33] S. Thompson: DKLAG6: sourcecode. Website of S. Thompson at the Department of Mathematics and Statisics, Radford University, Virginia: http://www.runet.edu/∼thompson/.

[34] S. Thompson und S. P. Corwin: DKLAG6: solution of systems of functional differential equations with state dependent delays. Website of S. Thompson at the Department of Mathematics and Statisics, Radford University, Virginia: http://www.runet.edu/∼thompson/.

[35] S. Thompson, S. P. Corwin und D. Sarafyan: DKLAG6: a code based on continously imbedded sixth order runge-kutta methods for the solution of state dependent functional differential equations. Website of S. Thompson at the Department of Mathematics and Statisics, Radford University, Virginia: http://www.runet.edu/∼thompson/.

[36] D. J. Tritton: *Physical Fluid Dynamics*. Oxford Science Publications, 1988.

[37] E. A. Zabolotskaya: Interaction of gas bubbles in a sound field. *Akust. Zh.* **30**, 618–623, [Sov. Phys. Acoustic, **30**, 365, (1984)], 1984.

Anhang C
Danksagung

Abschließend möchte ich mich bei folgenden Leuten bedanken, die alle auf Ihre Weise einen Teil zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere:

- Herrn Prof. Dr. Werner Lauterborn für die Möglichkeit, in seiner Arbeitsgruppe eine Diplomarbeit anzufertigen, für seine Geduld und ganz besonders für das Wecken meiner Begeisterung für Computer und insbesondere Unix-Systeme, die auf meinem weiteren Lebensweg eine sehr wichtige Rolle spielen werden;
- Herrn Dr. Robert Mettin für die wirklich hervorragende Betreuung während meiner Zeit in dieser Arbeitsgruppe, für die umfassende Hilfestellung bei diversen Problemen und Problemchen, und das Beisteuern vieler Ideen zu dieser Arbeit;
- Herrn Dipl.-Phys. Stefan Luther für wesentliche Impulse zur Numerik und weitere informative Hinweise;
- Herrn Dr. H. W. Strube für die sehr gute Administration unseres Rechnernetzwerks, mit dem es niemals irgendwelche Probleme gab;
- Herrn Dipl.-Phys. Martin Wiesenfeldt für die Unterstützung bei meinen ersten Unixschritten und weiteren Computerproblemen;
- Herrn W. Steinhoff und Herrn T. Geiling für die Wartung der Rechnerhardware;
- Herrn Dipl.-Phys Volker Ahlers für die Hilfestellung in puncto LaTeXund für das Style-File zu dieser Diplomarbeit;
- meinen Zimmerkollegen Volker Ahlers, Tobias Brendel, Gerrit Langer, Jörn Schekahn und Martin Voß und meiner Zimmerkollegin Dagmar Krefting für die immer angenehme Atmosphäre in unserem Raum;
- Frau Gisa Kirschmann-Schröder für viele sehr nette Gespräche und Mittagspausen;
- allen weiteren Mitgliedern unserer Arbeitsgruppe für Anregungen, Hinweise und die angenehme, offene Atmosphäre;

- meinen Eltern Karl-Friedrich und Dietlind Kamphausen für die Ermöglichung langer Zeiten meines Studiums durch ihre finanzielle Unterstützung und ihre Geduld;

- meinen künftigen Arbeitskollegen bei Novel Science International, Herrn Dr. Marcel Thürk, Herrn Dr. Rüdiger Goetz, Frau Dr. Martina Domeyer, Herrn Dr. Andreas Rupprecht und Herrn Georg König sowie Herrn Jürgens für moralische Unterstützung und einen Grund, mein Studium zügig zu beenden;

- der Free Software Foundation (*http://www.gnu.org/*) für viele der benutzten Programme und Inspiration, dem XEmacs Entwicklerteam (*http://www.xemacs.org*) für das Hauptarbeitswerkzeug, das zur Erstellung dieser Arbeit verwendet wurde, Per Abrahamsen (*auc-tex@sunsite.auc.dk*) für das `AUC TeX` Paket, Leslie Lamport für LaTeX und Donald E. Knuth für TeX, ohne die eine solche Arbeit kaum denkbar wäre;

- und schließlich meiner Freundin Semra Zeybek für so vieles.