Inhaltsverzeichnis

1 Kleines Delay – Große Wirkung

1.1 Einleitung

NIX IST INSTANTAN

Es gibt in der Physik -und nicht nur dort- Problemstellungen, in denen die Einflüsse einiger Größen erst verzögert auftreten. In der dazugehörigen DGL ist die entsprechende Größe mit einem *Delay* behaftet. Man mag auf den Gedanken kommen, daß dieses Prinzip vielleicht nicht sehr häufig vorkommt, doch wenn man sehr genau modellieren möchte, muß man auch schon die sehr kleinen Verzögerungen, die durch die endliche Lichtgeschwindigkeit hervorgerufen werden, beachten. Wie gesagt: nix ist instantan..
Einige Beispiele für Delay-Problemstellungen:

- Population: Zeit der Schwangerschaft
- Epidemien/Krankheiten: Inkubationszeit
- Medikamentöse Behandlung: Blutzirkulation
- Rückgekoppelte Systeme: Zeit bis zur Kopplung

und nicht zuletzt:

- Blasenwechselwirkung: Laufzeit im Medium

Es gibt Problemstellungen mit kurzem Delay, welche mit langem und solche, bei denen man die gesamte bisherige Lösung benötigt. Das Delay kann konstant sein, oder variabel. In letzterem Fall kann das Delay vom Zustand des Systems abhängen (oder auch nicht), eine Funktion einer Variablen sein, einer ganz anderen, unabhängigen, evtl. monotonen Funktion folgen oder aber ganz verschwinden, was dann den Spezialfall einer ODE bildet. Für die Lösung delay-behafteter DGL'n versucht man, bereits bestehende Routinen für ODE's an das Lösen von DDE's anzupassen. Die numerischen Lösungsroutinen für ODE's müssen unbedingt erweitert werden, damit sie ihre Lösungen ,,dicht" darstellen können:
Man darf nicht davon ausgehen, daß man einen Punkt der Lösung, den man -verzögert- später nochmal benötigt, bereits ausgerechnet hat (es sei denn, man löst die DGL mit einer festen Schrittweite..). Vielmehr wird es häufig der Fall sein, daß man einige Punkte aus der Nachbarschaft kennt, und aus diesen den gesuchten interpoliert $\rightarrow$ So wird die Lösung ,,dicht".
Ein weiteres Problem sind Diskontinuitäten in den Ableitungen. Sie treten auf, wenn die Vergangenheit der Lösung einen Sprung hat. Bei einem konstanten Delay von τ kann das an den Punkten $t = n \cdot \tau$ mit n $\in \mathbb{N}$ geschehen. Hat man (z.B.) gerade in der Initialisierungsfunktion Ψ einen anderen Wert, als den Startwert der jeweiligen Variablen, tritt an dem Punkt $t_0 = 0$ eine Unstetigkeit auf. Diese setzt sich über die Ableitung fort und erzeugt zu einem späteren Zeitpunkt t_1 einen ,,Knick" in der Lösung. Wenn die Lösung zum Zeitpunkt t_2 soweit fortgeschritten ist, daß sie ihre verzögerte Variable von $t = t_1$ benötigt, liefert das keinen Knick mehr (diese Stelle ist ja nun stetig) aber in der 2. Ableitung macht sich die alte Unstetigkeit immer noch bemerkbar (Änderung der Krümmung). So setzt sich eine Diskontinuität oder Unstetigkeit immer weiter fort, wird jedoch dabei immer glatter. Das gilt nicht nur für konstantes Delay, aber da ist

es sehr anschaulich. Bei einem variablen Delay treten die Unstetigkeiten immer gerade dann auf, wenn die Delay-Funktion an einem Sprung vorbeikommt. Selbstverständlich können auch später noch Unstetigkeiten auftreten, die sich dann - jede einzeln - auf diese Art und Weise fortsetzen.

1.2 Zur Lösung

Eine gute Übersicht über die vorhandene Literatur zur Lösung von DDE's gibt [1].
Eine ODE hat die bekannte Form:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), \vec{\mu}) \quad \text{mit einem Parametervektor } \vec{\mu} \tag{1}$$

Dagegen ist die Form einer DDE eher:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t-\tau), \vec{\mu}) \tag{2}$$

Zunächst scheint die (numerische) Lösung einer DDE relativ einfach. Man nimmt seine Lieblingsroutine für ODE's und erweitert sie um eine Interpolationsroutine, die die Ausgabe der Lösung dicht macht. So kann für jeden Punkt, falls es benötigt wird, der Wert der Lösung ausgegeben werden.
Allerdings bedarf es dazu einiger Vorbereitungen. Blake et.al. [1] beschreiben eine ,,method of steps", bei der man die DDE in einzelnen Schritten neu in eine ODE übersetzt. Man beschreibt die Menge aller Punkte, an denen sich das Delay ändert (soll heißen (konstantes Delay): $\tau, 2\tau, \ldots$) mit $\{\sigma_i\}$ und definiert auf den dazwischen entstehenden Intervallen die ,,Teillösungen" y_i. Dann wird die DDE für y_i zu einer ODE mit einer anderen Funktion y_{m-1} an der Stelle des Delays. So kann man dann Schritt für Schritt, bzw. Intervall für Intervall die DDE mit Hilfe einer beliebigen, robusten ODE-Routine lösen. Auch für variable Delays ist diese Methode zunächst kein Problem. Wenn das Delay allerdings irgendwann verschwindet versagt sie. Es sollte klar sein, daß die Schrittweite, mit der die ODE-Routine fortschreitet zu jedem Zeitpunkt größer als das Delay sein muß. Ansonsten wird die zu lösende Gleichung von einer expliziten zu einer impliziten. D.h. man benötigt die Lösung bereits an der Stelle, an der man sie gerade lösen will (das bedeutet ja gerade ,,verschwindendes Delay"). Dabei gilt ein Delay numerisch bereits als verschwindend, wenn es für irgendwelche Punkte kleiner wird als die minimal erlaubte Schrittweite.
Ein wichtiger Punkt ist noch die Wahl einer ,,dense-output-routine". Dies ist die Interpolationsroutine, mit der man die Lösung von einer diskreten Funktion zu einer kontinuierlichen erweitert. Die Ordnung ihrer Genauigkeit sollte aus irgendwelchen numerischen Gründen einen Grad höher sein, als die Genauigkeit des ODE solvers ([1]). Auch die adaptiven Schrittweiten-Regler müssen mit Bedacht gewählt werden. Es ist wichtig, darauf zu achten, daß die Schrittweite nie das Delay überschreitet (s.o.). Auch das Verhalten der Schrittweiten-controller an den evtl. vorhandenen Unstetigkeiten (s. 1.1) ist zu beachten, damit sich das Programm hier nicht festläuft oder aber einen (zu) großen Fehler macht.

1.3 Mein Ansatz

Mein Ansatz zum Lösen einer DDE ist es, den zu integrierenden Bereich in Intervalle aufzuteilen und dort zu lösen. Da ich ein konstantes Delay vorliegen habe, ist diese Aufteilung sehr einfach und eindeutig: Zunächst unterteile ich den zu integrierenden Breich in die Perioden der Schallanregung, diese werden nochmal geteilt in Intervalle von der Länge des Delays, wobei darauf geachtet wird, daß sich diese nie überlappen. Auf diesen Teilintervallen rufe ich die Numerical Recipes Routine `odeint` auf (,die von Volker und mir ziemlich verändert worden ist). Die verzögerten Werte der Lösung besorge ich mir mit der Routine `polint` (ebenfalls NR). Durch dieses Verfahren müsste ich eigentlich ein stabiles Programm erreichen, das mir die weiter unten (s. 3.1) beschriebenen Blasengleichungen löst. Leider ist das bisher nicht der Fall, was aber auch an meinem verwurschtelten Programmierstil liegen kann. Allerdings liegt der Fehler (noch) nicht in der DDE-Lösung, sondern bereits das Lösen der einfachen Keller-Miksis Gleichung läßt die Routine abschmieren.

2 DDE's und Nichtlineare Dynamik

2.1 Verallgemeinerung der logistischen Abbildung

Delays beleben das Verhalten dynamischer Systeme ganz deutlich. Einen Eindruck davon bekommt man, wenn man einmal die logistische Abbildung betrachtet:
Diskrete Logistische Abbildung:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) \tag{3}$$

Die diskrete Logistische Abbildung ist ein gut untersuchtes und gut verstandenes Standardbeispiel für ein chaotisches System. Man findet bei ihr die charakteristischen Eigenschaften chaotischer Systeme: Über eine Periodenverdopplungskaskade führt sie ins Chaos.
Kontinuierliche Logistische Gleichung:

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t)(1 - x(t)) \tag{4}$$

Die kontinuierliche Logistische Gleichung verhält sich linear, denn für das Auftreten von Oszillationen in kontinuierlichen Sytemen benötigt man ein System von mindestens zwei DGL'n erster Ordnung. (Sonst wird die Eindeutigkeit verletzt ...). Will man chaotisches Verhalten, benötigt man mindestens drei.
Fügt man nun jedoch ein Delay ein, erhält man die..
Kontinuierliche Logistische Gleichung mit Delay:

$$\dot{x(t)} = \lambda x(t - \tau)(1 - x(t - \tau)) \tag{5}$$

Diese wiederum zeigt die typischen Verhaltensweisen nichtlinearer Abbildungen:

- monotones Verhalten wie bei der KLA ohne Delay für $\lambda \in (0, 1/e)$
- Oszillieren um ein Gleichgewicht für $\lambda \in [1/e, \pi/2]$
- chaotisches Verhalten für $\lambda > \pi/2$

Siehe [2] und [1]. Die Einführung eines Delays läßt also aus einer drögen und langweiligen DGL ein System mit einer ungeheuren Vielfalt entstehen...

2.2 Poincare Abbildung für DDE's

In der Analyse nichtlinearer Abbildungen spielt die Poincare-Abbildung eine wichtige Rolle. Mit ihrer Hilfe erhält man Informationen über die Periodizität der Lösungen und kann die entsprechenden Bifurkationsdiagramme aufstellen. Die Erweiterung auf DDE's ist somit sehr erwünscht. Man könnte auf den Gedanken kommen, einfach zu verschiedenen Zeiten (in konstantem Abstand) den Zustand des Systems zu betrachten. Allerdings reicht diese Information nicht aus. Man muß die Funktion auf einem ganzen Intervall stroboskopisch beleuchten. Hong et. al. haben diese Problematik in ihrem Paper [2] für ein konstantes Delay beleuchtet (eine Erweiterung auf variable Delays ist mir nicht bekannt). In Abb.1 sind untereinander aufgetragen: Drei Lösungen der betrachteten Gleichung (Periode 1, Periode 6, Chaotisch), der ,,klassische" Poincareschnitt zu einer festen Zeit und der in dem Paper entwickelte erweiterte Poincareschnitt, in dem man nun gut die Periodizität erkennen kann. Beleuchtet man das System immer zu einer festen Zeit, kann es noch eine ,,Drift" geben. Das kann man verhindern, indem man den Belichtungszeitpunkt immer an einem Funktionswert festmacht (z.B. immer beim Nulldurchgang) Wie man sieht, ist der Poincare-Schnitt hier nicht nur ein Punkt, sondern eine ganze Linie. Nur wenn die Lösungen auf diesem Intervall identisch sind, gilt sie als periodisch.

Da die Lösung der Gleichungen numerisch geschieht, kann man sich natürlich auch solche Lösungen konstruieren, die den abgebildeten Schnitt ergeben, aber zwischen den berechneten Punkten noch wild hin und her schwingen (wenn dieser Verlauf auch nicht sehr wahrscheinlich ist..). Eine andere Methode, die ich mir überlegt habe, ist, daß man nach wie vor nur auf einen Punkt schaut, aber noch die erste (und evtl. die zweite) Ableitung mitnimmt. Auch dann erhält man mehr Information als nur den Wert der Lösung an diesem Punkt. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Lösung sich zwischendurch anders verhält ist -so denke ich- um einiges größer als bei der Methode der Intervalle (jedenfalls scheinen mir die möglichen Auch-noch-Lösungen wahrscheinlicher). Sie läßt sich aber durch die Hinzunahme höherer Ableitungen senken (dann nimmt natürlich die schöne Darstellbarkeit ab). Da man bei solchen Rechnungen (fast) immer numerisch die erste und/oder zweite Ableitung ermittelt und somit zur Verfügung hat, könnte dieses Verfahren vielleicht einen ,,periodic-pre-scan" ermöglichen, da man eher zu viele Peridizitäten findet, als zu wenig.

3 DDE's und Bubbles..

3.1 Zwei-Blasen-Wechselwirkung

In der Theorie der Kavitationsblasen kommt die DDE auch zum Zug. Hat man zwei SL-Blasen dicht beieinander, kann man die Schwingungen der einen Blase zur Anregung der anderen hinzuziehen. Man erhält dann folgende Gleichung für den Radius der ersten Blase:

$$\begin{aligned}\ddot{R}_1(t)((1-\frac{\dot{R}_1}{c})R_1+\frac{4\mu}{\rho c}) = dydx[2] = \frac{1}{\rho}(1+\frac{y[2]}{c})[(p_{stat}-\frac{2\sigma}{R_{10}})R_{10}^{3\kappa}R_1^{-3\kappa}-\frac{2\sigma}{R_1}-\frac{4\mu}{R_1}y[2]-p_{stat}-P_a sin(\omega t)] \\ +\frac{R_1}{\rho c}[-(p_{stat}-\frac{2\sigma}{R_{10}})R_{10}^{3\kappa}3\kappa\frac{y[2]}{R_1^{3\kappa+1}}+2\sigma\frac{y[2]}{R_1^2}+4\mu\frac{y[2]^2}{R_1^2}-P_a\omega cos(\omega t)] \\ -\frac{1}{d}(2y[4]^2(t-\tau)R_2(t-\tau)+R_2^2(t-\tau)dydx[4]^2(t-\tau)) \quad (6)\end{aligned}$$

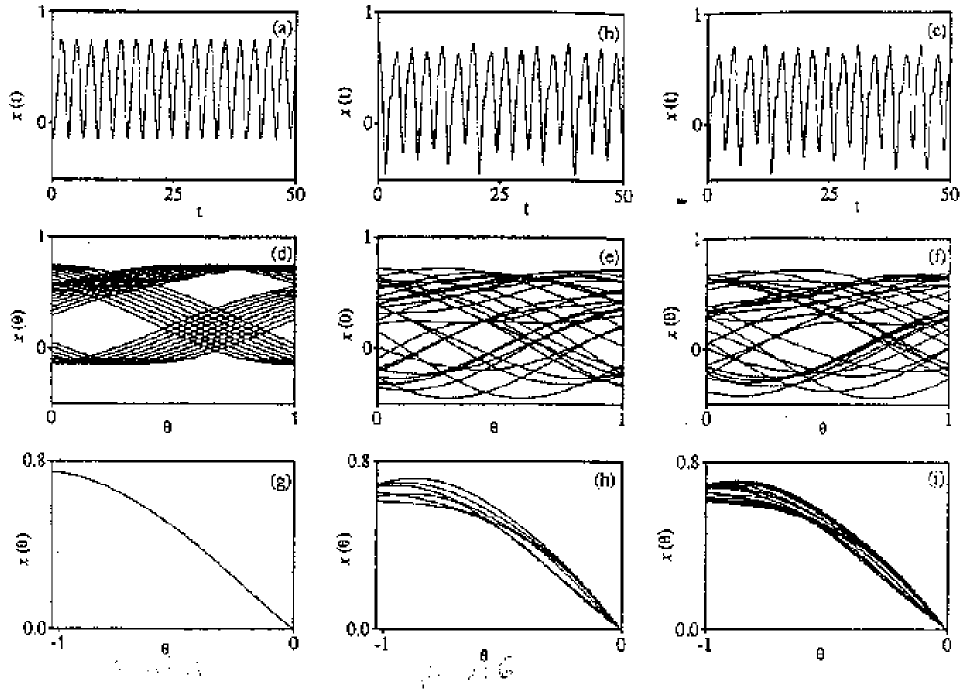

Abbildung 1: Verallgemeinerte Poincareabbildung

Dabei ist τ die Verzögerungszeit, die der Schall benötigt, um von Blase 2 nach Blase 1 zu kommen: $\tau = \frac{Blasenabstand}{C_{Medium}}$

Robert hat in seinem Paper [3] eine Betrachtung der zweiten Bjerknes Kraft durchgeführt, und es zeigte sich, daß bereits kleine Verschiebungen des Kollapszeitpunkt in den Blasenradien eine große Wirkung in der 2.Bjerknes Kraft haben können. Die Einführung eines Delays, das physikalisch sicher sinnvoll ist, sollte also auf keinen Fall unterschätzt werden. Diese Gleichungen (je Blase eine) kann man nun numerisch lösen und daraus die zweite Bjerkneskraft vermöge

$$\vec{F}_B = < \vec{F}_{12} > = -\frac{\rho}{4\pi d^2} < \dot{V}_1(t) \cdot \dot{V}_2(t-\tau) > \vec{e}_r \tag{7}$$

berechnen, wobei V_i das Volumen der Blase i bezeichnet

3.2 Zukunftsblasen oder Blasen mit negativem Delay

Eine Erweiterung des Modells auf ein nicht mehr konstantes Delay könnte so aussehen, daß man auch die Postion der beiden Blasen betrachtet und aus ihrer Entfernung die Zeit des Schalls berechnet. Die resultierende 2.Bjerkneskraft wird, wenn sie die Größenordnung der 1.Bjerkneskraft erreicht, die Blasen bewegen und damit das Delay ändern. Man hätte eine DDE mit einem variablen Delay, und zusammen mit Modellen, wie sie von Stefan und Robert entwickelt werden, die ein kontinuierliches Modell vieler Blasen erstellen, lassen sich vielleicht einige Mechanismen der Strukturbildung verstehen.

Literatur

[1] C.T.H. Baker, C.A.H. Paul, and D.R. Wille. Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations. *revised: Adv.Comp.Math*, 1994.

[2] Z. Hong, Z. Feizhou, Y. Jie, and W. Yinghai. Nonlinear differential delay equations using the poincare section technique. *Phys. Rev. E*, 54(6):6925–6928, 1996.

[3] R. Mettin, I. Akhatov, U. Parlitz, and W. Ohl, C.D.and Lauterborn. Bjerknes forces between small cavitation bubbles in a strong acustic field. *to be published in Phys.Rev.E*, 1997.